

COMPLEMENTI DI MECCANICA UNI-DIMENSIONALE

UGO LOCATELLI

1. STIME DEL PERIODO DI OSCILLAZIONE ATTORNO A UN PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE

Proposizione 1.1. *Siano l'energia potenziale U , il livello di energia E e un intorno aperto dell'origine $B(0) \subseteq \mathbb{R}$ tali che:*

- (A) $U : B(0) \mapsto \mathbb{R}$ soddisfa le seguenti ipotesi di regolarità: $U \in \mathcal{C}^1(B(0)) \cap \mathcal{C}^2(B(0) \setminus \{0\})$;
- (B) esiste un'orbita periodica che oscilla tra le barriere di potenziale x_- e x_+ , poste rispettivamente alla sinistra e alla destra dell'origine; in altri termini, questo significa che $U(x_{\pm}) = E$, $U(x) < E \forall x \in (x_-, x_+)$, $U'(x_-) < 0$ e $U'(x_+) > 0$;
- (C) $U'(0) = 0$.

Allora, vale sempre la seguente stima minorante il periodo:

$$(1.1) \quad T(E) \geq 2\pi \sqrt{\frac{m}{\sup_{x \in (x_-, 0) \cup (0, x_+)} U''(x)}} .$$

Inoltre, sussiste anche la seguente stima maggiorante il periodo:

$$(1.2) \quad T(E) \leq 2\pi \sqrt{\frac{m}{\inf_{x \in (x_-, 0) \cup (0, x_+)} U''(x)}} ,$$

purché

$$\inf_{x \in (x_-, 0) \cup (0, x_+)} U''(x) > 0 .$$

Prima di cominciare la dimostrazione, osserviamo che l'ipotesi (C) è non restrittiva. Infatti, per il teorema di Weierstrass esiste sicuramente un punto di minimo \hat{x} dell'energia potenziale U nell'intervallo (x_-, x_+) (si noti che dall'ipotesi (B) segue immediatamente che U assume valori massimi nell'intervallo $[x_-, x_+]$ proprio in corrispondenza agli estremi x_{\pm}). Essendo la funzione U derivabile (con continuità) in tutto $[x_-, x_+]$, allora $U'(\hat{x}) = 0$ per il teorema di Fermat. Qualora avvenga che $\hat{x} \neq 0$, possiamo cambiare le coordinate ponendo $X = x - \hat{x}$; l'origine del sistema di ascisse X è in corrispondenza al punto di minimo identificato dal valore \hat{x} (rispetto alle coordinate x). A patto di rinominare (con abuso di notazione) X come x , anche l'ipotesi (C) è soddisfatta. Di fatto, è solo per comodità che viene effettuata la scelta di porre l'origine in corrispondenza al punto dove l'energia potenziale assume il suo minimo nell'intervallo compreso tra e barriere di potenziale. Come conseguenza di questa scelta, risulterà assai semplificata la notazione di alcune formule che incontreremo durante la dimostrazione. L'unica differenza sostanziale tra le richieste riguardanti il punto di minimo e quelle sugli altri punti

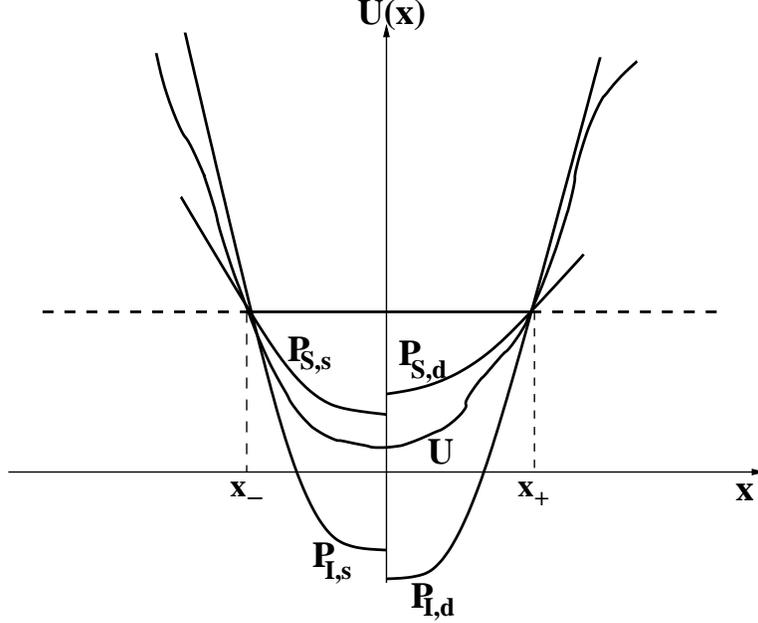


FIGURE 1. Schema esemplificativo della costruzione alla base della dimostrazione del lemma 1.2

riguarda l'ipotesi (A) della proposizione precedente, dove si evita di richiedere la regolarità della derivata seconda di U nel punto di minimo.

Lo schema della dimostrazione può essere riassunto come segue: si suddividono le stime del periodo di oscillazione in due parti: una alla sinistra del punto di minimo, l'altra alla sua destra. Per ciascuna di queste due parti, si individuano una parabola inferiore e una parabola superiore, che servono, rispettivamente, per determinare la maggiorante e la minorante nelle stime. Si noti sin d'ora che la scelta di utilizzare delle parabole *non è casuale*, perché il calcolo del periodo di semi-oscillazione associato a questo tipo di funzioni è estremamente semplice, essendo l'energia potenziale di tipo quadratico naturalmente associata a quella di un oscillatore armonico. Questo approccio dimostrativo è riassunto schematicamente in figura 1 ed è sostanzialmente basato sul seguente

Lemma 1.2. *Si assuma che per l'energia potenziale U , il livello di energia E e un intorno aperto dell'origine $B(0) \subseteq \mathbb{R}$ valgano le stesse ipotesi (A)–(C) enunciate all'interno della proposizione 1.1. Si considerino le quattro funzioni $P_{I;s}$, $P_{S;s}$, $P_{I;d}$ e $P_{S;d}$ definite nel modo seguente:*

$$\begin{aligned} P_{S;s}(x) &= \frac{1}{2}B_s x^2 + E - \frac{1}{2}B_s x_-^2, & P_{S;d}(x) &= \frac{1}{2}B_d x^2 + E - \frac{1}{2}B_d x_+^2, \\ P_{I;s}(x) &= \frac{1}{2}A_s x^2 + E - \frac{1}{2}A_s x_-^2, & P_{I;d}(x) &= \frac{1}{2}A_d x^2 + E - \frac{1}{2}A_d x_+^2, \end{aligned}$$

dove i coefficienti A_s , A_d , B_s e B_d sono tali che

$$\begin{aligned} A_s &= \sup_{x \in (x_-, 0)} U''(x), & A_d &= \sup_{x \in (0, x_+)} U''(x), \\ B_s &= \inf_{x \in (x_-, 0)} U''(x), & B_d &= \inf_{x \in (0, x_+)} U''(x). \end{aligned}$$

Sussistono, allora, le seguenti disuguaglianze:

$$P_{I;s}(x) \leq U(x) \leq P_{S;s}(x) \quad \forall x \in [x_-, 0]$$

e

$$P_{I;d}(x) \leq U(x) \leq P_{S;d}(x) \quad \forall x \in [0, x_+]$$

Dimostrazione. Per ovvie esigenze di brevità, ci limitiamo a provare che $P_{I;d}(x) \leq U(x) \forall x \in [0, x_+]$. Definiamo la funzione ausiliaria $g(x) = P_{I;d}(x) - U(x)$. Per assurdo, supponiamo che esista $\hat{x} \in [0, x_+)$ tale che¹ $g(\hat{x}) > 0$. Per il teorema di Lagrange applicato alla funzione g nell'intervallo $[\hat{x}, x_+]$, esiste $x^* \in (\hat{x}, x_+)$ tale che $g'(x^*) = (g(x_+) - g(\hat{x})) / (x_+ - \hat{x}) < 0$. Appliciamo ora il teorema di Lagrange alla funzione g' nell'intervallo² $[0, x^*]$, esiste quindi $\bar{x} \in (0, \hat{x}) \subset (0, x_+)$ tale che $g''(\bar{x}) = (g'(x^*) - g'(0)) / (x^* - 0) = g'(x^*) / x^* < 0$. Abbiamo quindi trovato che esiste un valore dell'ascissa $\bar{x} \in (0, \hat{x}) \subset (0, x_+)$ tale che $g''(\bar{x}) = P''_{I;d}(\bar{x}) - U''(\bar{x}) = A_d - U''(\bar{x}) < 0$. Siamo quindi giunti a un assurdo, poiché in \bar{x} la derivata seconda della funzione U sarebbe maggiore di $A_d = \sup_{x \in (0, x_+)} U''(x)$.

Ovviamente, la dimostrazione delle disuguaglianze $P_{I;s}(x) \leq U(x) \leq P_{S;s}(x) \forall x \in [x_-, 0]$ e $U(x) \leq P_{S;d}(x) \forall x \in [0, x_+]$ è analoga. \square

Possiamo ora concludere agevolmente la

Dimostrazione della proposizione 1.1. Si ricordi che sussiste la seguente formula per il periodo di oscillazione:

$$T(E) = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}.$$

Come immediata conseguenza dell'ipotesi $U(x) < E \forall x \in (x_-, x_+]$ e delle disuguaglianze $P_{I;s}(x) \leq U(x) \forall x \in [x_-, 0]$ e $P_{I;d}(x) \leq U(x) \forall x \in [0, x_+]$, che sono state dimostrate nel lemma 1.2, abbiamo che

$$2 \int_{x_-}^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - P_{I;s}(x))}} + 2 \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - P_{I;d}(x))}} \leq 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}.$$

¹Si osservi che non può essere $\hat{x} = x_+$, poichè $g(x_+) = P_{I;d}(x_+) - U(x_+) = E - E = 0$, per definizione della funzione $P_{I;d}(x)$.

²Si noti che, per poter applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, x^*]$, non è necessario che la derivata seconda g'' sia continua anche negli estremi dell'intervallo. Per questa ragione, è stato possibile evitare di richiedere che l'energia potenziale $U(x) = P_{I;d}(x) - g(x)$ sia \mathcal{C}^2 anche nell'origine. Inoltre, si osservi che la tangente nell'origine al grafico di g è sicuramente orizzontale, poichè $g'(0) = U'(0) - P'_{I;d}(0) = 0 - 0 = 0$, dove abbiamo utilizzato sia l'ipotesi (C) della proposizione 1.1 che la definizione della funzione $P_{I;d}$.

Calcoliamo esplicitamente uno dei due integrali che appare nel membro di sinistra della disequazione:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - P_{I;d}(x))}} &= \sqrt{\frac{m}{A_d}} \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{x_+^2 - x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{A_d}} \int_0^{x_+} \frac{dx}{x_+ \sqrt{1 - (x/x_+)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{A_d}} \arcsin\left(\frac{x}{x_+}\right) \Big|_0^{x_+} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{A_d}}. \end{aligned}$$

Si noti che la funzione integranda è ben definita in $[0, x_+)$, perché per ipotesi abbiamo che $E > U(x) \forall x \in [0, x_+)$; inoltre, per costruzione abbiamo che $U(x) \geq P_{I;d}(x)$ su quello stesso intervallo. Si osservi anche che abbiamo implicitamente utilizzato il fatto che $A_d > 0$; anche questa disuguaglianza è banalmente verificabile³. Ovviamente, in modo analogo a quanto appena fatto, si verifica anche che $\pi/2\sqrt{m/A_d}$ è il valore dell'integrale definito che riguarda la parabola inferiore sinistra $P_{I;s}$ sull'intervallo $[x_-, 0]$. Se ne ricava che

$$T(E) \geq \pi \left(\sqrt{\frac{m}{A_s}} + \sqrt{\frac{m}{A_d}} \right) \geq 2\pi \sqrt{\frac{m}{\sup_{x \in (x_-, 0) \cup (0, x_+)} U''(x)}},$$

dove abbiamo utilizzato la seguente uguaglianza:

$$\max\{A_s, A_d\} = \sup_{x \in (x_-, 0) \cup (0, x_+)} U''(x),$$

che è ovviamente vera per le definizioni di A_s e A_d , le quali compaiono all'interno dell'enunciato del lemma 1.2.

Passiamo ora alle stime riguardanti le parabole superiori. Come immediata conseguenza dell'ipotesi $U(x) < E \forall x \in (x_-, x_+]$ e delle disuguaglianze $P_{S;s}(x) \geq U(x) \forall x \in [x_-, 0]$ e $P_{S;d}(x) \geq U(x) \forall x \in [0, x_+]$, che sono state dimostrate nel lemma 1.2, abbiamo che

$$2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \leq 2 \int_{x_-}^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - P_{S;s}(x))}} + 2 \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - P_{S;d}(x))}}$$

Si noti che le integrande sono ben definite, perché l'ipotesi

$$\inf_{x \in (x_-, 0) \cup (0, x_+)} U''(x) > 0.$$

e le definizioni

$$B_s = \inf_{x \in (x_-, 0)} U''(x), \quad B_d = \inf_{x \in (0, x_+)} U''(x)$$

implicano che le funzioni $P_{S;s}(x) = \frac{1}{2}B_s x^2 + E - \frac{1}{2}B_s x_-^2$ e $P_{S;d}(x) = \frac{1}{2}B_d x^2 + E - \frac{1}{2}B_d x_+^2$ descrivono due parabole con concavità verso l'alto, che quindi stanno al di sotto della retta orizzontale che ha l'ordinata uguale al valore $E = U(x_{\pm})$

³Infatti, per ipotesi si ha che $U'(0) = 0$ e $U'(x_+) > 0$; applicando il teorema di Lagrange alla funzione U' nell'intervallo $[0, x_+]$, assicuriamo che esiste $\bar{x} \in (0, x_+)$ tale che $U''(\bar{x}) > 0$. Ne segue che $A_d = \sup_{x \in (0, x_+)} U''(x) \geq U''(\bar{x}) > 0$.

negli intervalli $(x_-, 0]$ e $[0, x_+)$, rispettivamente. Procedendo in modo analogo a quanto fatto in precedenza, si ottiene che

$$2 \int_{x_-}^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - P_{S;s}(x))}} = \pi \sqrt{\frac{m}{B_s}}$$

e

$$2 \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - P_{S;d}(x))}} = \pi \sqrt{\frac{m}{B_d}}.$$

Utilizzando queste ultime due equazioni, si può rapidamente portare a termine la dimostrazione dell'enunciato. \square

La proposizione 1.1 è stata volutamente formulata in modo da assumere le condizioni più deboli possibili sulla regolarità dell'energia potenziale U . Questo ci consente di risolvere agevolmente il seguente problema che è di un certo interesse, perché ci permette di descrivere l'andamento del periodo delle piccole oscillazioni anche nei pressi di minimi non quadratici.

Esercizio 1.3. *Si consideri il moto di una particella di massa m che è soggetta agli effetti di una forza la cui corrispondente energia potenziale è $U(x) = \frac{1}{2}k|x|^\alpha$, con $k > 0$ e il parametro $\alpha > 1$. Si studi l'andamento del periodo $T(E; \alpha)$ del moto orbitale con valore E dell'energia totale e nel limite di piccole oscillazioni, cioè per $E \rightarrow 0^+$. Si verifichi che*

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} T(E; \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{quando } \alpha \in (1, 2), \\ 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} & \text{quando } \alpha = 2, \\ +\infty & \text{quando } \alpha > 2. \end{cases}$$

Svolgimento. Innanzitutto, osserviamo che l'oscillazione avrà luogo tra le barriere di potenziale

$$x_\pm = \pm \left(\frac{2E}{k} \right)^{1/\alpha}.$$

Inoltre, la derivata seconda dell'energia potenziale altro non è che

$$U''(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} k |x|^{\alpha-2}.$$

Dalla formula generale della derivata seconda dell'energia potenziale, segue immediatamente che essa è costantemente uguale a k quando $\alpha = 2$; in tal caso, la proposizione 1.1 permette di concludere che il periodo è (com'è ovvio che sia) uguale a quello dell'oscillatore armonico indipendentemente dal valore dell'energia E , cioè $T(E; 2) = 2\pi \sqrt{m/k}$.

Consideriamo ora il caso con $\alpha \in (1, 2)$. Osserviamo che

$$\sup_{x \in (x_-, 0) \cup (0, x_+)} U''(x) = +\infty, \quad \inf_{x \in (x_-, 0) \cup (0, x_+)} U''(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)k}{2} \left(\frac{k}{2E} \right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}},$$

dove l'ultima equazione è stata riscritta in modo che l'esponente sia positivo (così come il coefficiente $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}k$). Siccome il sup della derivata seconda non è un numero finito, allora la disequazione (1.1) perde di senso, perché afferma solamente che il

periodo di oscillazione è positivo o nullo. Al contrario, la disequazione (1.2) ci consente di concludere che

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} T(E; \alpha) = 0 ,$$

poiché

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \left(\inf_{x \in (x_-, 0) \cup (0, x_+)} U''(x) \right) = +\infty$$

quando $\alpha \in (1, 2)$.

Passiamo ora a considerare l'ultimo caso, cioè quello con $\alpha > 2$, che si tratta in modo analogo al precedente. Osserviamo che

$$\sup_{x \in (x_-, 0) \cup (0, x_+)} U''(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1)k}{2} \left(\frac{2E}{k} \right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} , \quad \inf_{x \in (x_-, 0) \cup (0, x_+)} U''(x) = 0 .$$

Utilizzando la disuguaglianza (1.1) e il teorema del confronto per i limiti di funzioni, si conclude immediatamente che

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} T(E; \alpha) = +\infty ,$$

quando $\alpha > 2$. □

Come immediata e ulteriore conseguenza della proposizione 1.1, si dimostra il seguente corollario, che viene enunciato in una forma che si rivela essere abitualmente utile per le applicazioni esplicite.

Corollario 1.4. *Siano l'energia potenziale U , il livello di energia E e le ascisse x_{\pm} che individuano le barriere di potenziale tali che:*

- (A) $U \in \mathcal{C}^2([x_-, x_+])$;
- (B) $U(x_{\pm}) = E$, $U(x) < E \forall x \in (x_-, x_+)$, $U'(x_-) < 0$ e $U'(x_+) > 0$.

Allora, vale sempre la seguente stima minorante il periodo:

$$(1.3) \quad T(E) \geq 2\pi \sqrt{\frac{m}{\max_{x \in [x_-, x_+]} U''(x)}} .$$

Inoltre, sussiste anche la seguente stima maggiorante il periodo:

$$(1.4) \quad T(E) \leq 2\pi \sqrt{\frac{m}{\min_{x \in [x_-, x_+]} U''(x)}} ,$$

purché

$$\min_{x \in [x_-, x_+]} U''(x) > 0 .$$

Dimostrazione (in cenni). Come immediata conseguenza delle ipotesi, esiste il punto di minimo assoluto \hat{x} all'interno dell'intervallo $[x_-, x_+]$. Si riconsideri il problema utilizzando come coordinata $X = x - \hat{x}$ (questa definizione equivale a una traslazione dell'origine delle coordinate in corrispondenza al punto di minimo). La tesi segue allora immediatamente dalla proposizione 1.1, avendo cura di riformulare le stime in termini della coordinata x di partenza, anziché riferirsi alla variabile temporanea X . □

Vediamo subito all'opera il corollario precedente, applicandolo in modo da risolvere il seguente:

Esercizio 1.5. Si consideri la seguente equazione del moto (del pendolo con velocità angolare e massa uguali a 1):

$$\ddot{x} = -\sin x .$$

Sia T il periodo di oscillazione completa tra $x_- = -\pi/3$ e $x_+ = \pi/3$. Si dia una stima del periodo di quel moto, determinando esplicitamente due numeri reali positivi T_- e T_+ tali che $T_- \leq T \leq T_+$ con un errore relativo sulla stima, calcolato utilizzando la formula $(T_+ - T_-)/(T_+ + T_-)$, che sia inferiore al 50%.

Svolgimento. Innanzitutto, si calcoli l'energia potenziale

$$U(x) = \int dx \sin x = -\cos x .$$

L'energia potenziale ha evidentemente il suo punto di minimo assoluto in $x = 0$, il punto di massimo in $x = \pm\pi$ ed è una funzione pari. Queste osservazioni (che discendono immediatamente dal ben noto grafico della funzione coseno) spiegano perché è possibile avere un moto periodico di oscillazione completa tra le barriere di potenziale $x_{\pm} = \pm\pi/3$. Inoltre, si ottiene immediatamente che

$$U''(x) = \cos x , \quad \min_{x \in [x_-, x_+]} U''(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} , \quad \max_{x \in [x_-, x_+]} U''(x) = 1 .$$

Conseguentemente, l'enunciato del corollario 1.4 si traduce nella seguente catena di disuguaglianze:

$$2\pi = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\max_{x \in [x_-, x_+]} U''(x)}} \leq T \leq 2\pi \sqrt{\frac{1}{\min_{x \in [x_-, x_+]} U''(x)}} = 2\pi\sqrt{2} .$$

In altri termini, abbiamo ottenuto la stima desiderata ponendo $T_- = 2\pi$ e $T_+ = 2\pi\sqrt{2}$. Per controllare la bontà della stima non resta che effettuare l'ultimo calcolo:

$$\frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \simeq 0.17 ,$$

Cio ci assicura che l'errore relativo è ben inferiore al 50%. \square

Utilizzando opportunamente il precedente corollario 1.4 e il teorema del confronto per limiti di funzioni, si giustifica facilmente il seguente risultato, che è semplice ed assai famoso.

Teorema 1.6. (Comunemente detto del limite delle piccole oscillazioni, nell'ambito di problemi conservativi di meccanica uni-dimensionale) Sia $U : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione che rappresenta l'energia potenziale, tale che $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme aperto, $U \in \mathcal{C}^2(\mathcal{A})$ e $\hat{x} \in \mathcal{A}$ un punto di minimo stretto relativo dell'energia potenziale. Si consideri l'andamento (in funzione del livello di energia E) del periodo $T(E)$ dei moti che una particella di massa m compie, descrivendo orbite chiuse di tipo oscillatorio attorno a \hat{x} .

Allora, sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{E \rightarrow U(\hat{x})^+} T(E) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U''(\hat{x})}} ,$$

quando $U''(\hat{x}) > 0$. Invece, se $U''(\hat{x}) = 0$, si ha allora che

$$\lim_{E \rightarrow U(\hat{x})^+} T(E) = +\infty .$$

Nell'ambito della sistemi meccanici Lagrangiani, si può estendere efficacemente anche la determinazione delle frequenze caratteristiche (cioè l'inverso dei periodi) dei moti periodici nel limite di piccoli oscillazioni vicino a un punto di equilibrio stabile. Ciò sarà però possibile, quando verranno introdotti degli strumenti teorici che vanno ben al di là di quelli utilizzati finora.

UGO LOCATELLI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, II UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA),
VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY.
E-mail address: `locatell@mat.uniroma2.it`