

LA MECCANICA NEWTONIANA: NASCITA E PRIMI SUCCESSI AGLI ALBORI DELLA MECCANICA CELESTE MODERNA

UGO LOCATELLI

1. INCIPIT

Lo studio dei moti planetari è stato il principale argomento su cui si è affermata la rivoluzione scientifica del XVII secolo. In questa nota, l'esposizione degli argomenti segue l'ordine storico, in particolare, perché presenteremo prima il cosiddetto *problema inverso di Keplero* e poi quello *diretto*. Questa scelta non è dovuta a un vezzo stilistico, tanto è vero che utilizzeremo spesso delle tecniche ben diverse rispetto alle soluzioni originali di quei problemi, allo scopo di semplificare la trattazione. In questo caso, ci sembra che una presentazione che segue abbastanza lo sviluppo storico sia particolarmente interessante, perché costituisce un mirabile esempio di come nasce e si sviluppa una teoria scientifica.

2. IL PROBLEMA INVERSO DI KEPLERO

È importante sapere che, nell'ambito delle equazioni differenziali, ci riferiamo a un preciso tipo di argomenti, quando utilizziamo l'espressione "problema inverso". Infatti, i problemi diretti sono quelli in cui le equazioni sono date e dobbiamo trovarne le soluzioni. Al contrario, i problemi inversi sono tali che le loro soluzioni (o, nel caso di sistemi meccanici, le leggi del moto) sono note a priori e, allora, si deve determinare una parte incognita delle equazioni stesse.

Per quanto possa sembrare paradossale, da un punto di vista storico, il problema inverso di Keplero precedette quello diretto. Newton ebbe l'enorme merito di risolverli entrambi; in particolare, la discussione di quello inverso portò ad enunciare la legge di gravitazione universale; quest'ultima, una volta nota, permise di formulare il problema diretto.

Nell'ambito del problema inverso si assumono per veri i tre *principi della dinamica* e le tre *leggi di Keplero*, invece, si deve determinare l'espressione generale della forza che viene esercitata su un pianeta (o un satellite) dal corpo attorno al quale esso orbita. I tre *principi della dinamica* sono stati formulati in tempi diversi nel XVII secolo e possono essere brevemente riassunti come segue:

- (i) un corpo non soggetto a forze esterne prosegue nel suo moto rettilineo uniforme (*principio di inerzia*);
- (ii) il moto di un corpo puntiforme P di massa m , cui viene applicata una forza $\mathbf{F}$, obbedisce all'equazione $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ (*legge fondamentale della dinamica*¹);

¹A scanso di equivoci, è bene ricordare che il principio di inerzia non è banalmente contenuto nell'equazione fondamentale della dinamica (quando $\mathbf{F} = \mathbf{0}$). Infatti, il principio di inerzia vale per una certa classe di sistemi di riferimento che si dicono essere (giustappunto) inerziali. Il vettore $\mathbf{x}$ denota le coordinate spaziali in un tale sistema di riferimento, dove vale l'equazione fondamentale

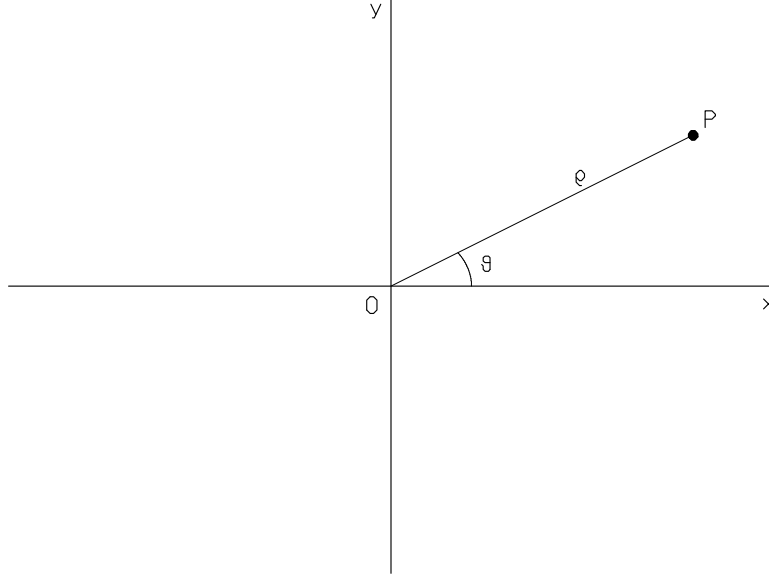


FIGURE 1. Introduzione delle coordinate polari.

- (iii) a ogni azione (cioè a ogni forza applicata) corrisponde una reazione (cioè un'altra forza) uguale in norma e direzione, ma di verso contrario (*principio di azione e reazione*).

Le leggi di Keplero sono abitualmente espresse nel modo seguente:

- (I) ciascun pianeta descrive un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi;
- (II) il raggio vettore, che congiunge il Sole con un pianeta, spazza aree uguali in tempi uguali;
- (III) il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore e il quadrato del periodo non dipende dal pianeta.

2.1. Conseguenze della prima legge di Keplero. La prima legge di Keplero induce naturalmente ad impostare un sistema di coordinate $Oxyz$, tale che il Sole è posto in corrispondenza all'origine O , il pianeta è rappresentato da un punto materiale P e l'ellisse descritta dall'orbita di P giace nel piano Oxy . La legge fondamentale della dinamica ci permette di trarre immediatamente una prima conclusione: la componente verticale della forza F_z è nulla (essendo, evidentemente, uguale a 0 la componente verticale dell'accelerazione). Inoltre, (per ragioni che saranno più chiare quando svolgeremo esplicitamente i calcoli descritti in questa sezione) è conveniente utilizzare le coordinate polari nel piano Oxy , a cui è associata la trasformazione

$$(2.1) \quad \Psi(\varrho, \vartheta) = (x(\varrho, \vartheta), y(\varrho, \vartheta)) \quad , \quad \text{dove} \quad \begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \end{cases} \quad ,$$

della dinamica, con $\mathbf{F}$ uguale alla somma vettoriale delle *sole forze attive* su P ; altrimenti, nel computo di $\mathbf{F}$ devono essere incluse anche le *forze apparenti*.

in accordo all'illustrazione schematica riportata in figura 1. Si noti che la trasformazione $\Psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è regolare e invertibile su tutto il dominio, ma non è iniettiva quando viene estesa a $\varrho = 0$.

In seguito all'introduzione delle coordinate (ϱ, ϑ) , dovremo ovviamente esprimere l'equazione fondamentale della dinamica in coordinate polari. A tale scopo, definiamo i due versori radiale e tangenziale (o, talvolta detto anche, angolare), che sono rispettivamente uguali a

$$(2.2) \quad \mathbf{e}_\varrho = (\cos \vartheta, \sin \vartheta) , \quad \mathbf{e}_\vartheta = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta) .$$

Si noti che quella coppia di versori è da considerarsi mobile, perché le loro direzioni sono orientate a seconda della posizione di P ; inoltre, sussistono le seguenti ovvie relazioni:

$$(2.3) \quad \frac{d\mathbf{e}_\varrho}{d\vartheta} = \mathbf{e}_\vartheta , \quad \frac{d\mathbf{e}_\vartheta}{d\vartheta} = -\mathbf{e}_\varrho , \quad \mathbf{e}_\varrho \cdot \mathbf{e}_\vartheta = 0 .$$

Utilizzando coordinate polari, siamo ora in grado di esprimere la posizione

$$(2.4) \quad \mathbf{x} = \varrho \mathbf{e}_\varrho ,$$

la velocità

$$(2.5) \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\varrho} \mathbf{e}_\varrho + \varrho \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta$$

e, con qualche calcolo aggiuntivo, l'accelerazione

$$(2.6) \quad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\varrho} \mathbf{e}_\varrho + 2\dot{\varrho}\dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \varrho \ddot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta - \varrho \dot{\vartheta}^2 \mathbf{e}_\varrho = (\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\vartheta}^2) \mathbf{e}_\varrho + \left[\frac{1}{\varrho} \frac{d}{dt} (\varrho^2 \dot{\vartheta}) \right] \mathbf{e}_\vartheta ,$$

dove il termine parallelo a $\mathbf{e}_\vartheta$ è stato riorganizzato in modo tale che compaia ϱ a denominatore, ma senza alcun rischio di incorrere in singolarità, perché *non* stiamo studiando moti collisionali (per cui la distanza $\varrho \rightarrow 0$). Siamo finalmente in grado di scrivere in coordinate polari l'equazione fondamentale della dinamica $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \ddot{\varrho} - \varrho \dot{\vartheta}^2 = \frac{F_\varrho}{m} \\ \frac{1}{\varrho} \frac{d}{dt} (\varrho^2 \dot{\vartheta}) = \frac{F_\vartheta}{m} \end{cases} ,$$

dove abbiamo denotato con F_ϱ e F_ϑ , rispettivamente, le proiezioni della forza in direzione radiale e tangenziale, cioè $F_\varrho = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\varrho$ e $F_\vartheta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\vartheta$; inoltre, è stata omessa la terza equazione, associata al moto sull'asse z , perché essa è una banale identità (si ricordi che $F_z = 0$).

La prima legge di Keplero implica anche l'esigenza di esprimere l'equazione per una conica in coordinate polari, la cui formulazione è particolarmente semplice ed elegante:

$$(2.8) \quad \varrho = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} ,$$

dove, comunemente, ci si riferisce alla costante p con il nome “parametro della conica”; invece, e denota l'eccentricità, rispetto alla quale possiamo effettuare la seguente ben nota classificazione:

- (A) se $e = 0$, allora l'equazione (2.8) descrive una circonferenza (di raggio p);
- (B) quando $e \in (0, 1)$, allora il luogo dei punti che soddisfano la (2.8) è un'ellisse;
- (C) se $e = 1$, allora l'equazione (2.8) descrive una parabola con asse di simmetria sull'asse delle x ;
- (D) quando $e > 1$, allora abbiamo un ramo d'iperbole.

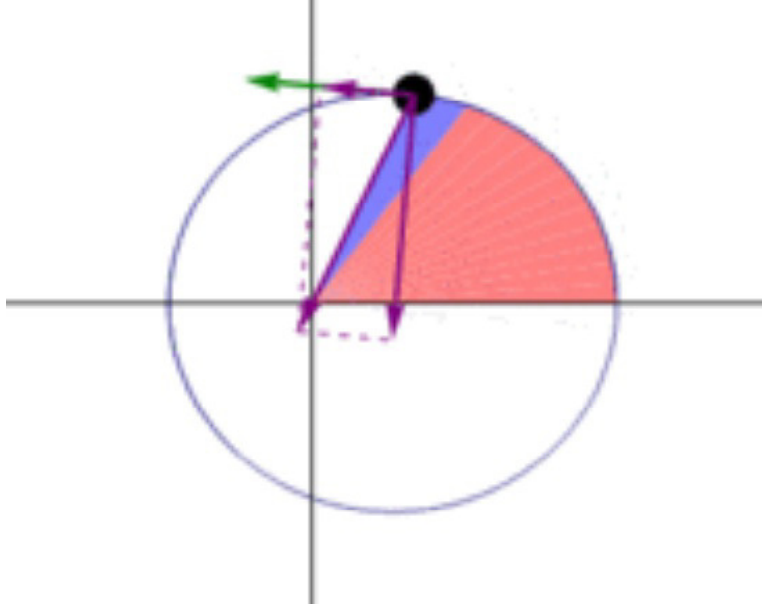


FIGURE 2. Illustrazione schematica del concetto di area spazzata dal raggio vettore che congiunge il centro di attrazione (che è posto nell'origine e può rappresentare, ad es., il Sole) con un punto materiale (ad es., un pianeta), che ruota attorno ad esso. Immagini prese dal sito http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler's_laws_of_planetary_motion, dove sono reperibili altre informazioni riguardanti le leggi di Keplero.

L'origine è sempre posta in corrispondenza ad uno dei fuochi, che nel caso (A) sono coincidenti e nel caso (C) è unico. Inoltre, per quanto riguarda (D), l'origine appartiene alla porzione convessa del piano che è delimitata dal ramo di iperbole. Una giustificazione dettagliata del fatto che l'equazione (2.8) rappresenta effettivamente un'ellisse, quando $e \in (0, 1)$, è riportata in appendice A. La trattazione degli altri casi è lasciata al lettore (come piacevole esercizio).

2.2. Conseguenze della seconda legge di Keplero. Innanzitutto, la seconda legge di Keplero deve essere decodificata, perché è espressa in un linguaggio che può apparire obsoleto. L'*area spazzata* in un generico intervallo di tempo $[t_0, t]$ è racchiusa, da un lato, dal raggio vettore che congiunge il Sole con un pianeta al tempo t_0 , dall'altro lato da quello stesso vettore al tempo t e, infine, dalla parte di curva che rappresenta l'orbita descritta dal pianeta tra t_0 e t . Graficamente, possiamo rappresentare l'*area spazzata* come quella porzione di piano colorata di rosso in figura 2, dove si intende che il Sole occupa l'origine del sistema di riferimento. Per poterne calcolare la superficie, è conveniente concentrarsi sul differenziale dell'area spazzata dA , descritto dal raggio vettore tra un tempo t e $t + dt$, ovvero la parte colorata di blu in figura 2. Si comprende facilmente che dA può essere ben approssimato dall'area del settore circolare di raggio ϱ (cioè la distanza tra il Sole e il pianeta al tempo t) e ampiezza $d\vartheta$; integrando tutti i contributi infinitesimali

all'area spazzata, possiamo quindi scrivere

$$(2.9) \quad \mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} \int_{\vartheta(t_0)}^{\vartheta(t)} d\psi \varrho^2(\psi) .$$

Si noti che nella formula precedente, all'interno dell'integrale abbiamo espresso la distanza ϱ in funzione dell'angolo; ciò è sicuramente possibile grazie alla prima legge di Keplero (si pensi all'equazione (2.8)).

La locuzione “*il raggio vettore, che congiunge il Sole con un pianeta, spazza aree uguali in tempi uguali*” è meno bizzarra di quel che può sembrare: applichiamola per esempio a due intervalli di tempo infinitesimali $[t_1, t_1 + dt]$ e $[t_2, t_2 + dt]$ (con $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ qualsiasi). La seconda legge di Keplero afferma quindi che il rapporto incrementale non dipende dal tempo, cioè la velocità areolare $\dot{\mathcal{A}}$ è uguale a una costante c . Possiamo finalmente descrivere questa legge con un'equazione completamente esplicita, effettuando la derivata di (2.9) rispetto al tempo, in modo tale da ottenere:

$$(2.10) \quad \frac{1}{2} \varrho^2 \dot{\vartheta} = c .$$

Confrontando l'equazione precedente con la seconda che compare in formula (2.7) siamo in grado di provare immediatamente la seguente

Proposizione 2.1. *La seconda legge di Keplero sussiste se e solo se la componente tangenziale della forza F_ϑ è identicamente nulla.*

Ovviamente, nel caso dei moti planetari, la costante c è diversa da zero (altrimenti, il concetto stesso di “area spazzata” perderebbe senso). Ne segue che $\varrho \neq 0$ (si pensi alla (2.10)), cioè la distanza dal centro di attrazione non si può annullare. Inoltre, anche

$$(2.11) \quad \dot{\vartheta} = \frac{2c}{\varrho^2} \neq 0 .$$

La formula precedente ci consente di esprimere la seguente

Osservazione 2.2. *La legge del moto $t \mapsto \vartheta(t)$ è monotona e, quindi, invertibile.*

Si ricordi anche che questo fatto era già implicitamente contenuto nella prima legge di Keplero (cioè in (2.8)) e in (2.9), dove la distanza è espressa in funzione dell'angolo ϑ .

Siccome si può esprimere il tempo t in funzione dell'angolo, risulta naturale riconsiderare anche la prima delle due equazioni di Newton (2.7) e riformularla in modo tale che compaiano solo le coordinate polari ϱ e ϑ . Cominciamo dalla velocità radiale:

$$\dot{\varrho} = \frac{d\varrho}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = \frac{2c}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{d\vartheta} = -2c \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{\varrho} \right) .$$

Conseguentemente, possiamo riscrivere il primo termine dell'accelerazione radiale come segue:

$$\ddot{\varrho} = \frac{d\dot{\varrho}}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = \frac{2c}{\varrho^2} \frac{d\dot{\varrho}}{d\vartheta} = -\frac{4c^2}{\varrho^2} \frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{\varrho} \right) .$$

Infine, nel membro sinistro della prima equazione del sistema (2.7), compare anche il termine $-\varrho \dot{\vartheta}^2$ che può essere riscritto nel modo seguente:

$$-\varrho \dot{\vartheta}^2 = -\varrho \left(\frac{2c}{\varrho^2} \right)^2 = -\frac{4c^2}{\varrho^3} .$$

Utilizzando le ultime due equazioni che abbiamo appena dedotto, possiamo finalmente scrivere l'accelerazione radiale in funzione delle sole coordinate radiali:

$$(2.12) \quad a_B = \ddot{\varrho} - \varrho \dot{\vartheta}^2 = -\frac{4c^2}{\varrho^2} \left[\frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{\varrho} \right) + \frac{1}{\varrho} \right] .$$

Quest'ultima è universalmente nota come formula dell'*accelerazione di Binet*.

Proprio per la definizione stessa dell'accelerazione di Binet, possiamo esprimere la componente radiale della forza nella forma $F_\varrho = ma_B$. Ciò ci consente di calcolarne l'espressione, utilizzando proprio l'equazione (2.12) e la prima legge di Keplero (2.8):

$$(2.13) \quad F_\varrho = -m \frac{4c^2}{\varrho^2} \left[\frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1 + e \cos \vartheta}{p} \right) + \frac{1 + e \cos \vartheta}{p} \right] = -\frac{4c^2}{p} \frac{m}{\varrho^2} .$$

Abbiamo quindi ottenuto un primo importantissimo successo; infatti, l'equazione precedente stabilisce quale è la dipendenza funzionale della forza dalle coordinate polari (cioè ϱ e ϑ) che individuano la posizione del pianeta: la *forza non dipende dall'angolo ϑ ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza ϱ* . Inoltre, essa è ovviamente centripeta, cioè è attrattiva verso il Sole che è situato nell'origine (si ricordi che $\mathbf{F} \parallel \mathbf{e}_\varrho$, perché la componente tangenziale è nulla, e si osservi che il valore di $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\varrho = F_\varrho$ è sempre negativo).

2.3. La legge di attrazione gravitazionale come soluzione del problema inverso di Keplero. La terza legge di Keplero ci consente di riesprimere in modo più significativo il coefficiente $4c^2/p$ (che compare nel membro destro di (2.13) ed è un rapporto di parametri orbitali, ovvero, essi dipendono solo dall'orbita descritta dal pianeta e dalla legge oraria con cui essa viene percorsa). A questo scopo, è conveniente esprimere la velocità areolare c (che è costante per la seconda legge di Keplero) come il rapporto dell'area racchiusa dall'orbita ellittica (di semiassi a e b) e il periodo di tempo T necessario a percorrerla; possiamo quindi scrivere

$$\frac{4c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{p T^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} ,$$

dove abbiamo utilizzato $p = b^2/a$ (cioè l'equazione (A.10), che fornisce una relazione puramente geometrica tra alcuni dei parametri che definiscono l'orbita ellittica). La terza legge di Keplero afferma proprio che il rapporto che appare nell'ultimo membro della formula precedente, ovvero a^3/T^2 , *non dipende* dal pianeta, quindi la quantità $\Gamma = 4c^2/p$ sarà una costante caratteristica di tutto il nostro sistema planetario. Siamo allora portati a pensare che Γ dipenda essenzialmente dal Sole. Infine, possiamo riassumere il senso di questa discussione con la seguente

Proposizione 2.3. *Il Sole (posto nell'origine di un sistema di riferimento inerziale) attrae ciascun pianeta di massa m con una forza centripeta tale che*

$$\mathbf{F} = -\frac{\Gamma m}{\varrho^2} \mathbf{e}_\varrho .$$

Prima di cominciare ad esultare, dobbiamo considerare anche le conseguenze del *principio di azione e reazione*, che finora è stato trascurato ma fa parte delle tre *leggi fondamentali della dinamica* e, quindi, del problema inverso di Keplero. Se il

Sole attrae il pianeta, allora anche quest'ultimo (per quanto piccolo) deve attrarre il Sole con una forza uguale e contraria, cioè tale che

$$-\mathbf{F} = \frac{\gamma M}{\varrho^2} \mathbf{e}_\varrho ,$$

dove M è la massa del Sole e γ è una costante che dipenderà dal pianeta. Il modo più semplice di mettere in accordo quest'ultima equazione con la proposizione 2.3 richiede di *postulare* che

$$\gamma M = \Gamma m = GMm ,$$

dove G è una costante che non dipende né dal Sole e nemmeno dal pianeta.

La situazione può apparire assai intricata, ma mettere un po' di ordine è meno difficile di quel che sembra. Innanzitutto, osserviamo che le forze di attrazione dipendono dalla distanza, ovviamente, ma anche dalle masse. L'intuizione fisica porta quindi a pensare che l'attrazione gravitazionale non è solo quella che spinge ciascun pianeta verso il Sole (e viceversa), ma è una forza che viene esercitata tra qualsiasi coppia di corpi dotati di *massa*. In questo senso essa è *universale* e *non è limitata ai soli corpi che si muovono nel cielo* (che anticamente aveva uno status particolare, dove tutto era perfetto). L'intuizione ci porta quindi ad interpretare la situazione in modo da formulare la seguente

Proposizione 2.4. [Legge di gravitazione universale] *Ciascun punto materiale P_1 dotato di massa m_1 esercita su un qualsiasi altro punto materiale P_2 di massa m_2 una forza attrattiva tale che*

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\frac{Gm_1m_2}{\overline{P_1P_2}^2} \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overline{P_1P_2}} .$$

Nella formula precedente, ovviamente, $\overrightarrow{P_1P_2}$ denota il vettore orientato che connette P_1 a P_2 , mentre $\overline{P_1P_2}$ è la distanza tra quei due punti; quindi, la quantità vettoriale $\overrightarrow{P_1P_2}/\overline{P_1P_2}$ altro non è che il versore che identifica la direzione spaziale da P_1 verso P_2 . Si noti che la formulazione della *legge di gravitazione universale* è consistente con il *principio di azione e reazione*, perché alla forza $\mathbf{F}_{1,2}$ esercitata da P_1 su P_2 corrisponde la reazione uguale e contraria $\mathbf{F}_{2,1}$ con cui P_2 attrae P_1 . L'universalità della legge di gravitazione fu confermata dall'esperimento di Cavendish del 1798, il quale mostrò (con una bilancia di torsione) che due qualsiasi corpi sferici si attraggono. Quell'esperimento permise anche di misurare la costante di gravitazione universale, il cui valore approssimato alla terza cifra significativa è

$$(2.14) \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} .$$

Da un lato, siamo sicuramente soddisfatti, perché questa discussione ci ha permesso di comprendere come è stato ottenuto un risultato fondamentale nella storia della scienza; dall'altro lato, probabilmente, ci sentiamo franare il terreno sotto i piedi. Infatti, abbiamo già più volte osservato che anche ciascuno dei pianeti attrae a sé il Sole, che quindi *non può costantemente rimanere nell'origine*. Ciò significa che il modello di moti centrali che abbiamo studiato è *incoerente*: una delle sue assunzioni che abbiamo effettuato (cioè, appunto, la quiete del Sole), quando abbiamo definito il nostro sistema di riferimento (all'inizio della sezione 2.1) è in disaccordo con il risultato fondamentale che abbiamo ottenuto. Non ci resta altra

strada se non quella che richiede di introdurre un modello più elaborato. Questo sarà l'oggetto del nostro studio, nel paragrafo seguente.

3. IL PROBLEMA DEI DUE CORPI IN RECIPROCA ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE

3.1. Primi elementi di una trattazione generale del problema dei 2 corpi: moto del baricentro e coordinate eliocentriche. *** Questa parte è tutta da scrivere,

per il momento si può far riferimento al paragrafo 2.4 (fino alla parte riguardante l'energia) degli "Appunti di Meccanica Razionale", di Benettin, Galgani, Giorgilli. ***

3.2. Moti centrali: soluzione del problema diretto di Keplero in coordinate eliocentriche. *** Questa parte è tutta da scrivere;

per il momento si può far riferimento al paragrafo 2.3.4 e alla fine del 2.4 degli "Appunti di Meccanica Razionale", di Benettin, Galgani, Giorgilli. ***

4. PRIMI ELEMENTI DI TEORIA DELLA GRAVITAZIONE

4.1. Forza prodotta da un corpo solido a simmetria sferica al suo esterno.

Per fissare le idee, consideriamo un pianeta tale che la sua densità δ sia sfericamente simmetrica, ovvero $\delta = \delta(\|\mathbf{x}\|)$. Per esprimere la forza, è conveniente scegliere le coordinate in modo che il punto materiale abbia coordinate $\mathbf{z} = (0, 0, R + h)$. Da queste assunzioni, discende in modo assai naturale che la forza esercitata dal pianeta sul suddetto punto materiale si esprime come segue:

$$(4.1) \quad \mathbf{F} = Gm \int_V \frac{\delta(\|\mathbf{x}\|)(\mathbf{x} - \mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^3} dV(\mathbf{x}) ,$$

dove $dV(\mathbf{x})$ è la misura dell'elemento di volume in prossimità del vettore posizione $\mathbf{x}$ e V è, ovviamente, il volume occupato dal pianeta.

Ci proponiamo ora di calcolare l'integrale in (4.1).

Esercizio 4.1. *Si mostri, usando le coordinate sferiche, che l'integrale in (4.1) si scrive come*

$$(4.2) \quad \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi d\varphi \delta(r) r^2 \sin \varphi \frac{(r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \varphi - R - h)}{[r^2 - 2(R + h)r \cos \varphi + (R + h)^2]^{\frac{3}{2}}} .$$

Inoltre, si verifichi che le prime due componenti del vettore in (4.2) sono nulle. (Suggerimento, si usi il teorema di Fubini e si integri in $d\vartheta$).

Esercizio 4.2. *Si mostri che la terza componente che compare in (4.2) si può scrivere nel modo seguente:*

$$-\frac{4\pi}{(R + h)^2} \int_0^R dr r^2 \delta(r) .$$

Svolgimento dell'esercizio 4.2. Dapprima, si integri la terza componente che compare in (4.2) rispetto a ϑ ; successivamente, si effettui la sostituzione $\eta = R + h -$

$r \cos \varphi$; inoltre, integrando per parti, si giustifica la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
& \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi d\varphi \delta(r) r^2 \sin \varphi \frac{r \cos \varphi - R - h}{[r^2 - 2(R+h)r \cos \varphi + (R+h)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= 2\pi \int_0^R dr \frac{r\delta(r)}{R+h} \left\{ \eta [r^2 + 2(R+h)\eta - (R+h)^2] \right\}^{-\frac{1}{2}} \Big|_{\eta=R+h-r}^{\eta=R+h+r} \\
&\quad - 2\pi \int_0^R dr \frac{r\delta(r)}{R+h} \int_{R+h-r}^{R+h+r} d\eta \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2(R+h)\eta - (R+h)^2}} \\
&= 2\pi \int_0^R dr \frac{r\delta(r)}{R+h} \left(\frac{R+h+r}{|R+h+r|} - \frac{R+h-r}{|R+h-r|} \right) \\
&\quad - 2\pi \int_0^R dr \frac{r\delta(r)}{(R+h)^2} (|R+h+r| - |R+h-r|) = -\frac{4\pi}{(R+h)^2} \int_0^R dr r^2 \delta(r) .
\end{aligned}$$

□

Unendo le tre affermazioni riportate negli esercizi 4.1–4.2, si ottiene che

$$(4.3) \quad \mathbf{F} = -\frac{Gm}{(R+h)^2} \left[4\pi \int_0^R dr r^2 \delta(r) \right] \mathbf{e}_z = -G \frac{mM_S}{(R+h)^2} \mathbf{e}_z ,$$

dove il versore $\mathbf{e}_z$ (nel sistema di coordinate scelto) individua la direzione congiungente il centro della sfera (occupata dal pianeta) con il punto materiale su cui viene esercitata la forza; inoltre, per un corpo la cui densità è a simmetria sferica, è facile convincersi che la sua massa è tale che $M_S = 4\pi \int_0^R dr r^2 \delta(r)$. Nel caso particolare di una sfera omogenea, allora $\delta(r) = \delta$ e $M_S = 4\pi R^3 \delta / 3$, quindi, la forza è data dalla formula

$$(4.4) \quad \mathbf{F} = -G \frac{mM_S}{(R+h)^2} \mathbf{e}_z = -G \frac{4\pi \delta m R^3}{3(R+h)^2} \mathbf{e}_z .$$

Si osservi inoltre che la formula (4.3) non presenta alcun problema di discontinuità per $h = 0$. Questo significa che la forza esercitata su un oggetto posto esattamente sulla superficie di un pianeta, è proprio quella espressa in (4.3) quando $h = 0$; questa conclusione può essere completamente giustificata, interpretando il secondo membro di (4.1) come un integrale improprio per $h \rightarrow 0^+$.

L'equazione (4.3) ci consente di trarre una prima importantissima conclusione (dovuta a Newton, si veda [2, Proposizione VIII–Teorema VIII, Vol. 2]): *il punto materiale è soggetto alla stessa forza che sentirebbe se il pianeta (la cui densità di materia è assunta essere sfericamente simmetrica) fosse un punto materiale di massa M_S posto al centro dello stesso*. È quindi ben giustificato il modello in cui i pianeti sono punti materiali, persino in casi “estremi” come l'interazione Terra–Luna o lo studio del moto di un satellite artificiale in orbita attorno alla Terra, dove le dimensioni dei corpi non sembrano affatto trascurabili.

Che dire?! Persino Newton ci dovette arrivare gradualmente. Infatti, egli approssimò sicuramente il Sole (!) e i pianeti con punti materiali, quando si trattò di formulare e verificare la legge di gravitazione universale². Porsi il problema

²La genesi della legge di gravitazione universale fu piuttosto laboriosa e richiese parecchio tempo, come testimoniato dal manoscritto di Newton *De motu corporum in gyrum*, antecedente di 3 anni rispetto alla pubblicazione dei *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, pubblicato per la prima volta nel 1687 (si veda [2] per una traduzione in inglese).

dell'universalità, significava chiedersi se la forza di gravità soddisfacesse le stesse leggi sia per i corpi celesti che per gli oggetti attorno a noi. Ai nostri giorni, la risposta affermativa appare scontata, allora non lo era affatto. Questa è la vera questione celata dietro al famoso aneddoto della mela di Newton: l'accelerazione verso il basso cui è soggetto un corpo che cade, ad esempio, da un albero può essere spiegata come effetto della stessa attrazione gravitazionale, che il pianeta Terra esercita su altri corpi celesti? Per quanto riguarda la caduta dall'albero, però, non aveva senso *assumere a priori* che la Terra potesse essere sostituita da un corpo puntiforme. Ciò è possibile solo *in seguito a una giustificazione rigorosa*, che Newton riportò appunto in Proposizione VIII–Teorema VIII del Vol. 2 dei *Principia* e che noi abbiamo umilmente ridimostrato grazie agli esercizi 4.1–4.2. Il “problema della mela di Newton” è comunemente riformulato, ai giorni nostri (si veda la sezione 2.2 di [1]), nel modo seguente.

Esercizio 4.3. *Si calcoli l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre, dopo aver effettuato le seguenti approssimazioni:*

- (A) *la Terra sia una sfera omogenea di raggio $R_T = 6,375 \times 10^6$ m;*
- (B) *l'orbita della Luna sia una circonferenza di raggio $R = 3,844 \times 10^8$ m;*
- (C) *il periodo di rivoluzione della Luna sia $T = 2,3605 \times 10^6$ s ($\simeq 27,321$ giorni).*

(Suggerimento: si ricordi che, quando l'orbita è circolare, l'attrazione gravitazionale è uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso, alla forza centrifuga $m\omega^2 R$, con $\omega = 2\pi/T$).

La risposta al problema precedente è circa uguale, a meno di un errore dell'1 %, al ben noto valore dell'accelerazione sulla superficie terrestre, cioè $9,8 \text{ m/s}^2$. Un tale accordo tra il valore calcolato e quello atteso è più che soddisfacente, se si ricorda tutto ciò che è stato trascurato (l'eccentricità dell'orbita lunare, l'effetto del moto di rotazione della Terra sull'accelerazione di gravità in superficie, etc.).

4.2. Studio della forza esercitata da un corpo solido a simmetria sferica sia al suo interno che al suo esterno. Consideriamo ora un particolare solido “cavo al suo interno”, ovvero il guscio sferico $\mathcal{G}_{R_1, R_2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 ; R_1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq R_2\}$ (talvolta detto anche “corona sferica”), dove i raggi interno ed esterno soddisfano l'ovvia relazione $0 \leq R_1 \leq R_2$.

Esercizio 4.4. *Si mostri che la forza che un guscio sferico, con densità δ sfericamente simmetrica, esercita su un qualsiasi punto materiale di coordinate $\mathbf{x} = (0, 0, R_1 - h)$ è nulla, quando $0 \leq h \leq R_1$.*

(Suggerimento: si proceda come per gli esercizi 4.1–4.2, avendo cura di completare il ragionamento utilizzando opportuni integrali impropri nei casi $R_1 = 0$ o $R_1 = R_2$ oppure $h = 0$).

Unendo il contenuto della formula (4.3) con il risultato riassunto nel precedente esercizio, si ottiene la seguente

Proposizione 4.5. [“teorema del guscio sferico”] *La forza esercitata da un guscio sferico $\mathcal{G}_{R_1, R_2}$, con densità δ sfericamente simmetrica, su un punto materiale P è nulla se la distanza di P dal centro O del guscio è minore o uguale a R_1 , mentre è come se tutto il guscio fosse in O , quando $\overline{OP} \geq R_2$.*

Si noti che, per dimostrare la seconda parte dell'enunciato precedente (cioè sotto l'ipotesi $\overline{OP} \geq R_2$), basta applicare la formula (4.3) con $\delta(r) = 0 \forall 0 \leq r < R_1$ e $R = R_2$.

Siamo finalmente in grado di dare una descrizione completa della forza di attrazione gravitazionale che un pianeta esercita su un punto materiale ovunque situato nello spazio.

Teorema 4.6. [Newton, Gauss] *Si consideri un corpo di centro O , raggio R e con densità a simmetria sferica $\delta = \delta(r) \forall 0 \leq r \leq R$. Esso esercita su un qualsiasi punto materiale P di massa m una forza di attrazione $\mathbf{F}$, che è parallela ed equiversa al vettore congiungente P con il centro O . Inoltre, la norma $F = \|\mathbf{F}\|$ è tale che*

(I) *se la distanza r tra O e P è inferiore al raggio R della sfera, allora*

$$F = G \frac{m}{r^2} \left[4\pi \int_0^r dr_1 r_1^2 \delta(r_1) \right] ;$$

(II) *se invece la distanza $r = \overline{OP} \geq R$, allora*

$$F = G \frac{M_S m}{r^2} , \quad \text{dove} \quad M_S = 4\pi \int_0^R dr_1 r_1^2 \delta(r_1) .$$

L'affermazione (II) dell'enunciato di questo teorema altro non è che una riformulazione di quanto dimostrato nella sezione precedente. La parte (I) della tesi può essere facilmente dimostrata, considerando separatamente i contributi alla forza di attrazione che sono dati da due sotto-parti della sfera: una sfera più piccola di raggio r e il guscio sferico $\mathcal{G}_{r,R}$.

La parte (I) della tesi del teorema 4.6 ci consente di discutere un altro interessante risultato. Infatti, l'espressione di F riportata al punto (I) mette in evidenza che è possibile determinare la variazione della densità δ in funzione del raggio, grazie a un opportuno sistema di misura della forza di gravità (ad esempio, con un dinamometro) all'interno di un pozzo di trivellazione. Ovviamente, dal punto di vista pratico, una tale procedura è sottoposta a fortissime limitazioni: la tecnologia a nostra disposizione consente di effettuare delle trivellazioni di lunghezza trascurabile rispetto al raggio della Terra (per non parlare di quanto sarebbe difficile trasportare una trivella su un altro corpo celeste roccioso). In verità, le variazioni delle misure di gravità riscontrabili vicino alla superficie della Terra o di un pianeta (da una navicella orbitante vicino ad esso) vengono principalmente utilizzati per ricostruire (parzialmente) la disomogeneità della densità interna di quel corpo. Si può facilmente intuire che, però, questo è un problema inverso la cui soluzione è così complicata che esula dagli scopi di queste note.

Inoltre, a partire dal Teorema 4.6, si dimostra immediatamente il seguente

Corollario 4.7. *All'interno di una sfera omogenea di densità δ , l'intensità della forza $\mathbf{F}$ (di attrazione gravitazionale verso il centro) cresce linearmente con la distanza r dal centro della sfera. Infatti,*

$$F = \|\mathbf{F}\| = G \frac{4\pi m \delta}{3} r .$$

In linea di principio, ogni dispositivo che venisse inserito internamente al corpo celeste per verificare la correttezza della parte (I) del Teorema 4.6 o del Corollario 4.7, turberebbe la assai ipotetica simmetria sferica della distribuzione della materia all'interno del pianeta stesso. Si pensi all'esempio precedentemente discusso del pozzo di trivellazione, lungo il quale verrebbero effettuate misure gravitazionali.

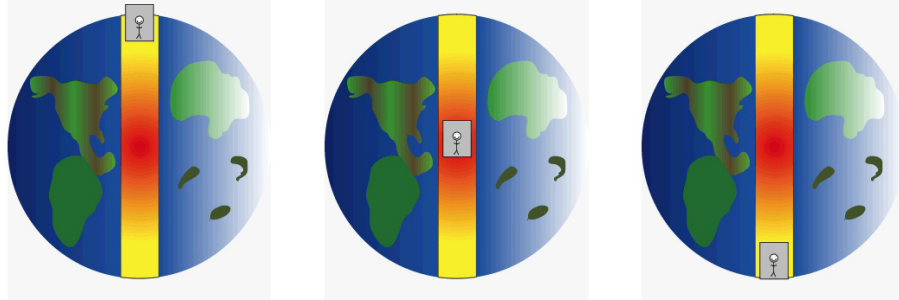


FIGURE 3. Illustrazione schematica di un ascensore gravitazionale che collega il polo nord della Terra a quello sud. Immagini prese dal sito http://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_train, dove sono reperibili molte altre informazioni riguardanti questo ipotetico progetto.

Per semplicità, ovviamente, si considerano queste piccole perturbazioni come assolutamente trascurabili e, quindi, si continua a trattare il problema in una (ideale) situazione di simmetria sferica. Quest'ultima discussione dovrebbe aiutarci a comprendere che il prossimo problema è risolvibile, sebbene possa sembrare veramente strampalato.

Esercizio 4.8. *Verificare se è realistico che un ipotetico ascensore gravitazionale come quello che viene usato nel film di fantascienza “Total recall” (del 2012) impieghi circa 40 minuti per effettuare un viaggio di sola andata tra una stazione e quella situata ai suoi antipodi. A questo scopo si effettuino le seguenti approssimazioni:*

- (A) *la Terra sia una sfera omogenea di raggio $R_T = 6,375 \times 10^6$ m;*
- (B) *l'accelerazione dovuta all'attrazione gravitazionale terrestre sia uguale a $9,8$ m/s² in qualunque punto della sua superficie.*

Svolgimento (*traccia*). Per realizzare un ascensore gravitazionale, ci vorrebbe innanzitutto una conduttura di forma cilindrica il cui asse è perfettamente allineato a un diametro della “sfera” terrestre. All'interno di questa conduttura, una cabina priva di motore (oltre che completamente incurante della pressione e della temperatura al centro della Terra) oscilla da un estremo all'altro, senza essere soggetta ad alcun attrito. Facendo riferimento alla situazione schematica di un ascensore gravitazionale così come riportata in figura 3, quando la cabina di massa m si trova a quota z rispetto al centro della Terra (posto nell'origine del sistema di riferimento), allora si comprende facilmente che essa è soggetta a una forza

$$\mathbf{F} = -kz\mathbf{e}_z \quad \text{dove} \quad k = G \frac{4\pi m\delta}{3}$$

(altro non è che una semplice applicazione del corollario 4.7). Il moto sull'asse z della cabina sarà quindi come quello di un (gigantesco) oscillatore armonico di

costante elastica k , che oscilla tra R e $-R$. Il tempo che si richiede di valutare è quello di un semiperiodo, cioè $\pi\sqrt{m/k}$. Quando la cabina si trova in uno dei due poli, i dati del problema consentono di determinare il rapporto k/m e, quindi, di risolvere il problema. $\square$

5. COMPLEMENTI SUI MOTI CENTRALI

5.1. Metodo del potenziale efficace; moti a rosetta. Torniamo a riconsiderare, nei termini più generali che ci sono possibili, il moto di una particella P di massa m , soggetto all'azione di una forza centrale, cioè tale che $\mathbf{F} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\varrho)\mathbf{e}_\varrho$, dove $F_\varrho = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\varrho = F_\varrho(\varrho)$. Detto a parole, nelle due formule precedenti si assume che la forza sia diretta lungo la direzione radiale $\mathbf{e}_\varrho$ e la (unica) componente radiale della forza F_ϱ dipende solo dalla distanza dall'origine. Possiamo quindi riscrivere le equazioni di Newton in coordinate polari (2.7) nella forma seguente:

$$(5.1) \quad \begin{cases} \ddot{\varrho} - \varrho\dot{\vartheta}^2 = -\frac{1}{m} \frac{dU}{d\varrho} \\ \frac{1}{\varrho} \frac{d}{dt}(\varrho^2\dot{\vartheta}) = 0 \end{cases},$$

dove $U(\varrho) = -\int F_\varrho d\varrho$ è l'energia potenziale corrispondente alla forza centrale che stiamo considerando. Con alcuni facili calcoli, si dimostra la seguente

Proposizione 5.1. *Sussistono le seguenti leggi di conservazione:*

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}m\dot{\varrho}^2 + U_{\text{eff}}(\varrho) = E \\ m\varrho^2\dot{\vartheta} = J \end{cases},$$

dove il cosiddetto potenziale efficace è definito in modo tale che $U_{\text{eff}}(\varrho) = J^2/(2m\varrho^2) + U(\varrho)$.

Inoltre, le due suddette leggi di conservazione sono equivalenti alle equazioni del moto in coordinate polari, che compaiono in formula (5.1), quando $\dot{\varrho} \neq 0$.

È abituale riferirsi al termine $J^2/(2m\varrho^2)$ con il nome di potenziale centrifugo. Procedendo in modo analogo a quanto viene fatto usualmente a proposito dei problemi di meccanica unidimensionale con forze di tipo puramente posizionali (M.U.P.), si dimostra la seguente

Proposizione 5.2. *Il sistema di equazioni differenziali (5.1) è integrabile con il metodo delle quadrature, a partire dalla leggi di conservazione riportate in formula (5.2).*

Riportiamo la verifica dettagliata della seguente proposizione il cui enunciato è sostanzialmente simile a quello precedente.

Proposizione 5.3. *L'equazione differenziale che descrive l'andamento dell'orbita $\varrho = \varrho(\vartheta)$ per i moti centrali, cioè*

$$(5.3) \quad -\frac{J^2}{m} \frac{1}{\varrho^2} \left[\frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{\varrho} \right) + \frac{1}{\varrho} \right] = -\frac{dU}{d\varrho},$$

è risolubile per quadrature. La sua soluzione è

$$(5.4) \quad \vartheta - \vartheta_0 = \pm \int_{1/\varrho}^{1/\varrho_0} \frac{J}{\sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(1/w))}} dw ,$$

dove le coordinate polari iniziali sono (ϱ_0, ϑ_0) .

Dimostrazione. Innanzitutto, verifichiamo l'equazione (5.3). Essa altro non è che la componente radiale dell'equazione di Newton (cioè la prima in formula (5.1)), dove abbiamo scritto il membro di destra utilizzando l'espressione 2.12 dell'*accelerazione di Binet* e abbiamo sostituito la velocità areolare $c = \frac{1}{2}\varrho^2\dot{\vartheta}$, in modo da utilizzare la legge di conservazione del momento angolare (cioè la seconda equazione in formula (5.2)), da cui si ricava $c = J/(2m)$.

Come abbiamo osservato in proposizione 5.1, le equazioni (5.1) sono equivalenti alle leggi di conservazione (5.2). Ripartiamo da queste ultime: dalla prima equazione di (5.2) segue che

$$\dot{\varrho} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(\varrho))} .$$

Dopo aver ricordato che, per i moti centrali, la legge del moto $t \mapsto \vartheta(t)$ è monotona e, quindi, invertibile, procedendo in modo simile a ciò che è stato fatto a proposito dell'accelerazione di Binet, si ricava

$$\dot{\varrho} = \frac{d\varrho}{d\vartheta}\dot{\vartheta} = \frac{J}{m\varrho^2} \frac{d\varrho}{d\vartheta} .$$

Unendo le ultime due equazioni, si ottiene

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \pm \frac{\varrho^2}{J} \sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(\varrho))} .$$

Una semplice applicazione del procedimento di separazione delle variabili ci consente di scrivere la seguente equazione:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \pm \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{J}{\varrho^2 \sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(\varrho))}} d\varrho .$$

Da quest'ultima, la sostituzione di variabili $w = 1/\varrho$ all'interno dell'integrale ci permette di ricavare la (5.4). $\square$

Due immediate applicazioni della formula di quadratura che abbiamo ottenuto sono discusse nel seguente

Corollario 5.4. *Si consideri un problema di moto centrale*

- (A) *se le condizioni iniziali e i parametri di un problema di moto centrale sono tali che l'orbita è illimitata e il valore $\varrho_- > 0$ costituisce una barriera di potenziale (cioè $U_{\text{eff}}(\varrho_-) = E$, $U_{\text{eff}}(\varrho) < E \forall \varrho \in (\varrho_-, +\infty)$, $U'_{\text{eff}}(\varrho_-) < 0$), allora l'angolo di deviazione tra le due direzioni asintotiche (comunemente noto come "angolo di scattering") è dato da*

$$(5.5) \quad \Delta\vartheta = \pm \int_0^{1/\varrho_-} \frac{J}{\sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(1/w))}} dw ;$$

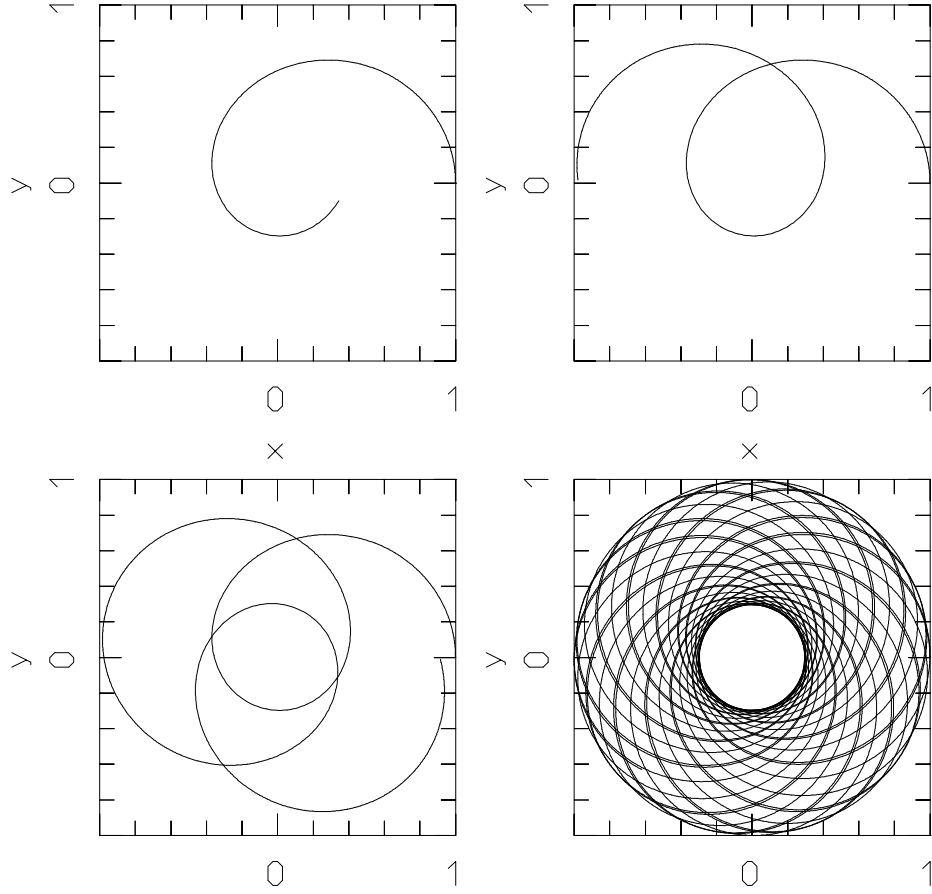


FIGURE 4. Tracciamento dell'orbita di un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto all'azione di una forza centrale di potenziale $U(\varrho) = -1/\varrho^{3/2}$, dove ϱ è la distanza dal centro. Le condizioni iniziali sono $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 1$. Il tracciamento dell'orbita viene effettuato per intervalli di tempo via via più grandi passando da un riquadro all'altro, da destra a sinistra e dall'alto verso il basso.

(II) se invece le condizioni iniziali e i parametri del problema sono tali che l'orbita è compresa tra due estremi di oscillazione $\varrho_{\pm}$ che fungono da barriera di potenziale (cioè $U_{\text{eff}}(\varrho_{\pm}) = E$, $U_{\text{eff}}(\varrho) < E \forall \varrho \in (\varrho_{-}, \varrho_{+})$, $U'_{\text{eff}}(\varrho_{\pm}) \neq 0$), allora l'angolo di precessione tra due passaggi consecutivi al pericentro ϱ_{-} (o, equivalentemente, all'apocentro ϱ_{+}) è dato da

$$(5.6) \quad \Delta\vartheta = \pm \int_{1/\varrho_{+}}^{1/\varrho_{-}} \frac{J}{\sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(1/w))}} dw .$$

La formula (5.5) ha una certa importanza storica, perché venne utilizzata per congetturare che i nuclei degli atomi di cui è fatta la materia generano un campo di forze di tipo Coulombiano (la cui norma, in altri termini, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal nucleo, esattamente come per il problema diretto di Keplero). Questa ipotesi venne formulata per spiegare l'andamento degli angoli di scattering osservati nell'esperimento di Rutherford (primo decennio del '900), che portò all'elaborazione del modello atomico della materia.

Nel riquadro in alto a destra della figura 4, è particolarmente evidente l'angolo di precessione $\Delta\vartheta$ tra due passaggi consecutivi all'apocentro ϱ_+ ; quel valore $\Delta\vartheta$ può essere calcolato esplicitamente usando la formula (5.6), con $U(\varrho) = -1/\varrho^{3/2}$, $E = -1/2$ e $J = 1$ (in accordo con le condizioni iniziali riportate nella didascalia). Questo tipo di moti centrali, con oscillazioni radiali comprese tra un pericentro ϱ_- e un apocentro ϱ_+ (che corrispondono a delle barriere di potenziale tali che $U_{\text{eff}}(\varrho_{\pm}) = E$) vengono comunemente detti *moti a rosetta*. Essi sono ulteriormente caratterizzati dalla seguente

Proposizione 5.5. *In un moto a rosetta, si consideri il valore dell'angolo di precessione $\Delta\vartheta$ tra due passaggi al pericentro, così come definito dalla formula (5.6).*

- (I) *L'orbita (nel piano Oxy normale al momento angolare) è chiusa se e solo se il rapporto $\frac{\Delta\vartheta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$;*
- (II) *se invece il rapporto $\frac{\Delta\vartheta}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, allora l'orbita riempie densamente la corona circolare di centro O , raggio interno ϱ_- e raggio esterno ϱ_+ .*

In questo contesto, si intende che un'orbita è chiusa quando torna su se stessa o, equivalentemente, se la funzione $\vartheta \mapsto \varrho(\vartheta)$ è periodica. In tal caso, l'orbita include tutti i suoi punti di accumulazione. Al contrario, come affermato al punto (II) della proposizione, se l'orbita riempie densamente una corona circolare, essa non include tutti i suoi punti di accumulazione (il cui insieme forma la corona stessa), coerentemente con la definizione che, in questo caso, non considera l'orbita come chiusa. Non riportiamo la dimostrazione della proposizione 5.5, di cui la parte (I) è intuitivamente vera, mentre è un po' più laboriosa la giustificazione della (II).

Le situazioni descritte dalle affermazioni (I) e (II) della proposizione 5.5 sono, rispettivamente, visualizzate nelle figure 5 e 6, dove è stato considerato il potenziale del tipo $U(\varrho) = -1/\varrho + \varepsilon/\varrho^2$, per cui è particolarmente agevole calcolare il dell'angolo di precessione $\Delta\vartheta$, come verrà illustrato nel paragrafo 5.3.

La fenomenologia della precessione del pericentro è mirabilmente sintetizzata dal seguente

Teorema 5.6. [Bertrand] *Esistono solo due problemi di moto centrale per cui tutte le orbite limitate sono anche chiuse. Essi sono quelli corrispondenti al potenziale di Keplero (per cui $U(\varrho) = -k/\varrho$) e a quello armonico (cioè il caso $U(\varrho) = k\varrho^2/2$).*

Per la dimostrazione, si rimanda alla sezione 2.7 di [1]. In queste note, ci limitiamo a dare qualche motivazione intuitiva che illustri l'eccezionalità delle caratteristiche del potenziale di Keplero e di quello armonico. Innanzitutto, essi hanno in comune la seguente notevole proprietà: esiste un ulteriore integrale primo (indipendente dall'energia e dal momento angolare) per le equazioni del moto centrale associate a questi due potenziali. Per quanto riguarda il caso Kepleriano, ciò verrà illustrato nel seguente paragrafo 5.2. Per il potenziale armonico, la situazione è particolarmente semplice. Infatti, basta scrivere le equazioni di Newton in coordinate

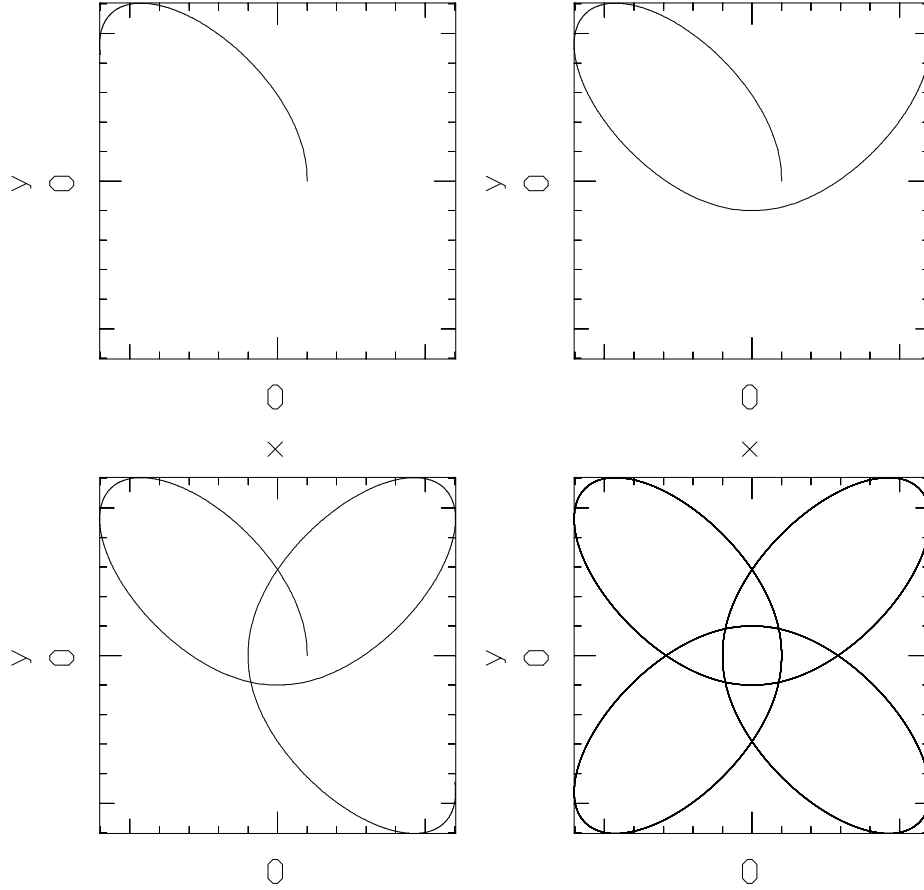


FIGURE 5. Tracciamento dell'orbita di un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto all'azione di una forza centrale di potenziale $U(\varrho) = -1/\varrho + \varepsilon/\varrho^2$, dove ϱ è la distanza dal centro e in questo caso $\varepsilon = 7/18$. Le condizioni iniziali sono $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 1$ (in modo tale che $\bar{J}/J = 4/3$, dove si ricorda che $\bar{J}^2 = J^2 + 2\varepsilon$). Il tracciamento dell'orbita viene effettuato per intervalli di tempo via via più grandi passando da un riquadro all'altro, da destra a sinistra e dall'alto verso il basso.

cartesiane nel piano Oxy (normale al momento angolare), cioè

$$m\ddot{x} = -kx, \quad m\ddot{y} = -ky,$$

per rendersi conto che esse si disaccoppiano e, quindi, si conservano entrambe le “componenti” dell'energia, cioè $E_x = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + kx^2)$ e $E_y = \frac{1}{2}(m\dot{y}^2 + ky^2)$. Inoltre, è ben noto che il potenziale armonico è l'unico a godere di una speciale proprietà: tutte le oscillazioni che si ottengono proiettando i moti sull'asse x o su quella delle y sono isocrone tra loro e di periodo $2\pi\sqrt{m/k}$. Utilizzando la semplice soluzione delle

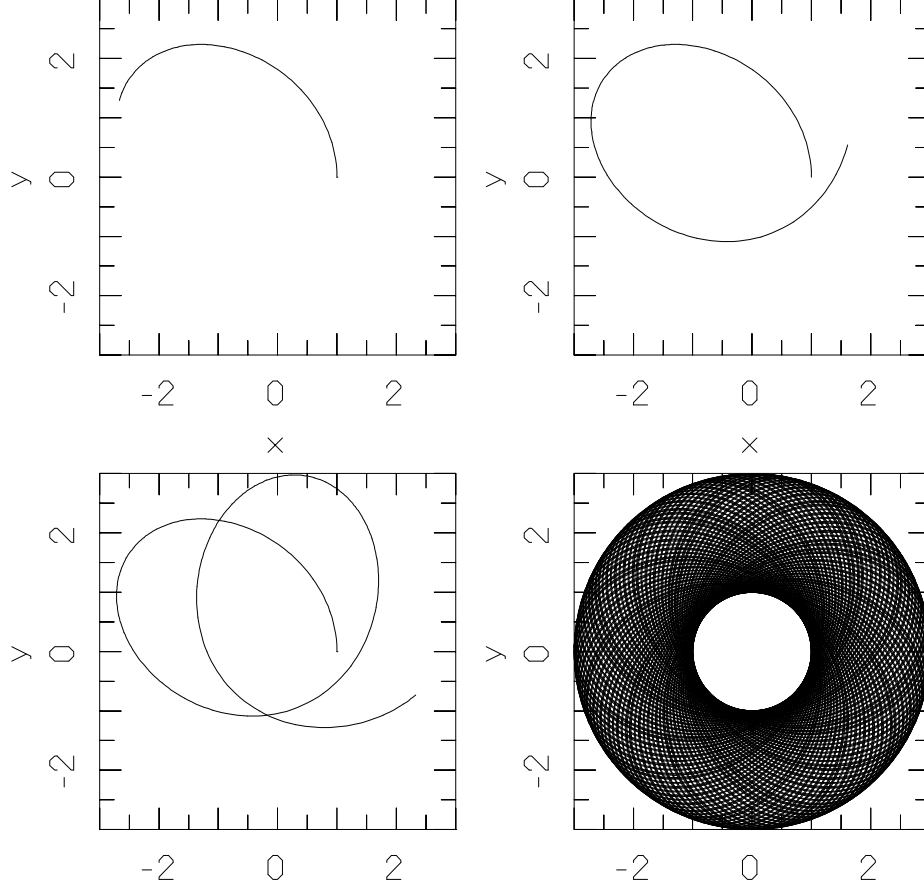


FIGURE 6. Tracciamento dell'orbita di un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto all'azione di una forza centrale di potenziale $U(\varrho) = -1/\varrho + \varepsilon/\varrho^2$, dove ϱ è la distanza dal centro e in questo caso $\varepsilon = 1/4$. Le condizioni iniziali sono $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 1$ (in modo tale che $\bar{J}/J = \sqrt{3/2}$, dove si ricorda che $\bar{J}^2 = J^2 + 2\varepsilon$). Il tracciamento dell'orbita viene effettuato per intervalli di tempo via via più grandi passando da un riquadro all'altro, da destra a sinistra e dall'alto verso il basso.

suddette equazioni di Newton e, quindi, l'isocronia delle oscillazioni sui due assi, si può verificare che tutte le orbite sono ellissi con il centro di simmetria nell'origine.

5.2. Alcuni ulteriori approfondimenti riguardanti il problema diretto di Keplero. Con un po' di calcoli, prevalentemente semplici, ma noiosi si può dimostrare la seguente

Proposizione 5.7. *Nel problema di Keplero, quando le orbite sono ellittiche, sussistono le seguenti relazioni tra i parametri orbitali a , e (che denotano, rispettivamente, il semiasse maggiore e l'eccentricità) e le costanti del moto E , J :*

$$\begin{aligned} a &= -\frac{k}{2E}, & E &= -\frac{k}{2a}, \\ e &= \sqrt{1 + \frac{2J^2 E}{mk^2}}, & J &= \sqrt{mka} \sqrt{1 - e^2}. \end{aligned}$$

Il suddetto enunciato si limita a coprire solo il caso di orbite limitate (e, quindi, ellittiche), perché è la situazione di cui si occupa il teorema di Bertrand. Comunque, queste relazioni possono essere opportunamente estese anche ad altri tipi di orbite (iperboliche, etc.). In particolare, vale sempre l'equazione che fornisce l'eccentricità e in funzione dell'energia E e del momento angolare J .

Alcune delle relazioni elencate nella proposizione precedente sono essenziali per poter provare la seguente

Proposizione 5.8. [Proprietà del vettore di Laplace–Runge–Lenz] *Nel problema di Keplero, il vettore comunemente detto di Laplace–Runge–Lenz, cioè*

$$\mathbf{A} = m\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{J} - mk \frac{\mathbf{x}}{\varrho},$$

è una costante del moto. Inoltre, esso ha la stessa direzione e verso della semiretta uscente dall'origine e passante per il pericentro; infine, la sua norma soddisfa l'equazione seguente:

$$A = mke,$$

dove e è l'eccentricità dell'orbita.

Quest'ultima proposizione spiega perché anche il potenziale kepleriano compare nell'enunciato del teorema di Bertrand, ovvero tra quelli per cui tutte le orbite limitate sono anche chiuse. Infatti, siccome il vettore $\mathbf{A}$ individua la direzione del pericentro e, al contempo, è un integrale primo per il sistema, allora non ci può essere alcuna precessione del pericentro stesso, a meno che non sia di un angolo $\Delta\vartheta$ che è multiplo intero di 2π .

5.3. Soluzione esplicita dell'equazione per l'orbita nel caso di un problema prossimo a quello di Keplero. Consideriamo un problema di moto centrale con potenziale del tipo³

$$U(\varrho) = -\frac{k}{\varrho} + \frac{\varepsilon}{\varrho^2}.$$

In pratica, $\frac{\varepsilon}{\varrho^2}$ può essere visto come la prima correzione dovuta a un'eventuale serie dove l' n -esimo termine generale è del tipo $\mathcal{O}(1/\varrho^n)$.

L'equazione differenziale (5.3), che descrive l'andamento dell'orbita $\varrho = \varrho(\vartheta)$, in questo caso, assume la forma seguente:

$$(5.7) \quad -\frac{J^2}{m} \frac{1}{\varrho^2} \left[\frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{\varrho} \right) + \frac{1}{\varrho} \right] = -\frac{k}{\varrho^2} + \frac{2\varepsilon}{\varrho^3}.$$

³Alcuni autori di testi di meccanica razionale e/o analitica assegnano l'enunciazione e la soluzione di questo problema a Calogero, un fisico italiano che ha insegnato per parecchi anni a "La Sapienza" di Roma. In realtà, si tratta di un problema di facile soluzione (in quanto è praticamente riconducibile a quello di Keplero), ciò ne rende particolarmente incerta l'attribuzione della paternità.

Dopo aver diviso entrambi i membri dell'equazione per $-J^2/(m\rho^2)$ è conveniente introdurre la variabile $u = 1/\rho$, in modo tale da riscrivere la precedente equazione (5.7) nella forma seguente:

$$(5.8) \quad u'' + \frac{\bar{J}^2}{J^2} u = \frac{1}{p} ,$$

dove abbiamo posto $\bar{J}^2 = J^2 + 2m\varepsilon$ e $p = J^2/(mk)$. Siccome si intende che il parametro ε è “piccolo”, abbiamo implicitamente assunto che $J^2 + 2m\varepsilon > 0$. È ben noto che la soluzione generale dell'equazione differenziale (5.8) è $u(\vartheta) = A \cos(\vartheta + \varphi) + 1/p$, dove A e φ sono variabili di integrazione, il cui valore è fissato dalle condizioni iniziali. È conveniente effettuare un'eventuale rotazione degli assi coordinati (e, quindi, traslare l'origine dell'angolo ϑ), in modo tale da porre $\varphi = 0$. Di conseguenza, abbiamo che

$$\rho(\vartheta) = \frac{p}{1 + e \cos\left(\frac{\bar{J}}{J}\vartheta\right)} ,$$

dove abbiamo introdotto il parametro $e = pA$, che chiamiamo eccentricità in analogia a quanto fatto nel caso del problema di Keplero diretto. Dall'ultima equazione che abbiamo scritto, possiamo immediatamente concludere che l'orbita è chiusa (con lo stesso significato già discusso a proposito della proposizione 5.5) se e solo se $\frac{\bar{J}}{J} \in \mathbb{Q}$.

Esercizio 5.9. *Utilizzando i dati descritti nella didascalia di figura 5, si verifichi che l'angolo di precessione tra due passaggi consecutivi al pericentro è $\Delta\vartheta = 3\pi/2$ per quel problema specifico. Inoltre, si osservi l'orbita che è riportata nella stessa figura 5; dal disegno dovrebbe risultare piuttosto evidente che il valore di $\Delta\vartheta$ è proprio $3\pi/2$.*

APPENDIX A. ELLISSI IN COORDINATE POLARI

Fondamentalmente, in questa appendice vogliamo ricondurre l'equazione (2.8) alla forma canonica delle ellissi in coordinate cartesiane. A questo scopo, cominciamo a riscrivere la (2.8) nel modo seguente:

$$(A.1) \quad \rho + e\rho \cos \vartheta = p ,$$

dove ricordiamo che (ρ, ϑ) denota la coppia di coordinate polari, p è il parametro della conica, mentre l'eccentricità e (nel caso delle ellissi) è tale che

$$(A.2) \quad 0 < e < 1 .$$

Per la definizione (2.1) delle coordinate polari, si ha che $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\rho \cos \vartheta = x$; quindi, l'equazione (A.1) può essere ulteriormente riscritta in coordinate cartesiane, in modo da ottenere

$$(A.3) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = p - ex .$$

Dopo aver imposto la *condizione di esistenza* delle soluzioni, cioè

$$(A.4) \quad ex \leq p ,$$

possiamo elevare al quadrato ambo i membri di (A.3):

$$(A.5) \quad x^2 + y^2 = p^2 - 2epx + e^2x^2 .$$

Allo scopo di adattare l'equazione precedente alla forma canonica di un'ellisse, è conveniente riscriverla come segue:

$$(A.6) \quad (1 - e^2)x^2 + 2epx + \frac{e^2p^2}{1 - e^2} + y^2 = \frac{p^2}{1 - e^2} ,$$

dove l'assunzione (A.2) ci assicura che il termine $1 - e^2$ (che compare due volte a denominatore) è positivo. Il membro di sinistra dell'equazione (A.6) è evidentemente formato da una somma di quadrati, quindi è naturale riadattarla ulteriormente come segue:

$$(A.7) \quad \frac{\left(x + \frac{ep}{1 - e^2}\right)^2}{\frac{p^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1 - e^2}} = 1 .$$

Abbiamo quindi ottenuto quel che cercavamo, l'equazione precedente descrive un'ellisse con centro di simmetria⁴ in

$$(A.8) \quad \left(-\frac{ep}{1 - e^2}, 0\right)$$

e semiassi

$$(A.9) \quad a = \frac{p}{1 - e^2} , \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} .$$

Sia a che b sono ben definiti e positivi, perché $0 < e < 1$ (come abbiamo assunto in (A.2)); inoltre, per la stessa ragione, si verifica facilmente che $a > b$, cioè a è proprio il semiasse maggiore. Osserviamo che dalle formule (A.8)–(A.9) segue che $x \leq a - ep/(1 - e^2)$, quindi possiamo scrivere la seguente catena di disuguaglianze:

$$ex \leq e \left(a - \frac{ep}{1 - e^2}\right) \leq \frac{ep(1 - e)}{1 - e^2} = \frac{e}{1 + e}p < p ;$$

abbiamo così provato *a posteriori* che la soluzione è consistente con la corrispondente condizione di esistenza (A.4).

Dalla formula (A.9) si deduce la seguente definizione del parametro p della conica, che si rivela essere piuttosto utile perché è espressa in termini puramente geometrici (cioè in funzione dei semiassi):

$$(A.10) \quad p = \frac{b^2}{a} .$$

Al fine di poter discutere correttamente le conseguenze della prima legge di Keplero, è utile localizzare i fuochi dell'ellisse, che si trovano sulla stessa ordinata del centro di simmetria, da cui entrambi distano $\sqrt{a^2 - b^2}$. Sapendo che il centro di simmetria è quello riportato in (A.8), possiamo calcolare le coordinate dei fuochi nel modo seguente:

$$(A.11) \quad \begin{aligned} \left(-\frac{ep}{1 - e^2} \pm \sqrt{a^2 - b^2}, 0\right) &= \left(-\frac{ep}{1 - e^2} \pm \sqrt{\frac{[1 - (1 - e^2)]p^2}{(1 - e^2)^2}}, 0\right) \\ &= \left(-\frac{ep}{1 - e^2} \pm \frac{ep}{1 - e^2}, 0\right) . \end{aligned}$$

⁴Per maggior chiarezza, si introducano le due nuove variabili $\xi = x + ep/(1 - e^2)$, $\eta = y$ e si osservi che l'equazione (A.7) viene trasformata nella forma canonica di un'ellisse, cioè $\xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 = 1$, dove i semiassi a e b sono proprio quelli definiti in (A.9).

Possiamo quindi riassumere i risultati descritti in questa appendice, affermando che l'equazione in coordinate polari $\varrho = p/(1 + e \cos \vartheta)$ (cioè la (2.8)), quando $0 < e < 1$, è equivalente alla forma canonica (A.7), la quale descrive un'ellisse, di cui uno dei due fuochi (quello più a destra) è nell'origine; inoltre, i valori dei suoi semiassi $a > b$ sono quelli riportati in formula (A.9).

REFERENCES

- [1] Giorgilli, Antonio. *Appunti di Meccanica Celeste*, reperibili in rete al sito <http://www.mat.unimi.it/users/antonio/meccel/meccel.html>
- [2] Newton, Isaac. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Vol. 1,2. Translation by Motte, revised by Cajori. University of California Press, Berkeley, CA, 1962.