G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli

Appunti di Meccanica Razionale

anno accademico 1998 – 99

1

INTRODUZIONE ALLA TEORIA QUALITATIVA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

1.1 Considerazioni generali sulle equazioni differenziali ordinarie[1)]

1.1.1 L'equazione di Newton come equazione differenziale; semplici esempi con le corrispondenti soluzioni generali

L'equazione di Newton $ma = F(x, v, t)$ per un sistema a un grado di libertà, tipicamente un punto di massa m su una retta, soggetto a forza F, è il più comune esempio (anzi, in un certo senso il prototipo) di equazione differenziale ordinaria. Ricordiamo che l'incognita è il movimento $x = x(t)$, ossia una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che ad ogni tempo t associa l'ascissa $x = x(t)$ del punto; denotiamo con $v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \equiv \dot{x}(t)$ la velocità e con $a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) \equiv \ddot{x}(t)$ l'accelerazione. Allora l'equazione di Newton appare come una equazione differenziale

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \ , \tag{1.1}$$

[1)] Come riferimento generale sulle equazioni differenziali ordinarie, un testo classico è G.Sansone e R.Conti, *Equazioni differenziali non lineari*, Edizioni Cremonese (Roma, 1956), o anche G.Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Zanichelli (Bologna, 1963), con un capitolo sull'integrazione numerica. L'inizio dello studio qualitativo delle equazioni differenziali ordinarie può forse essere ricondotto a H.Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, Jour. de Math. pures et appl. (3),7, 375–422 (1881), anche in H.Poincaré, *Oeuvres*, T.1, pag 12.

o anche

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \tag{1.2}$$

dove $f = F/m$; la funzione $x = x(t)$ si dice soluzione della (1.2), se si ha

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t), t) \quad \text{per ogni } t \ .$$

La (1.2) è detta equazione differenziale ordinaria del secondo ordine *in forma normale*, ovvero risolta rispetto alla derivata di ordine massimo.[2)]

Il più semplice esempio è

i. la *particella libera* (moto per inerzia), con $f(x) = 0$ e dunque equazione

$$\ddot{x} = 0 \ .$$

Si verifica subito che

$$x(t) = at + b$$

è soluzione per ogni scelta dei parametri a, b,[3)] e anzi che al variare di a e b si ottengono tutte le soluzioni dell'equazione.[4)]

L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale è detto *soluzione generale*, o *integrale generale*, dell'equazione. L'integrale generale (si vedano i testi di analisi) contiene sempre un numero di parametri liberi pari all'ordine dell'equazione.

Un secondo esempio elementare è

ii. L'*oscillatore armonico* $m\ddot{x} = -kx$ $(k > 0)$, ovvero

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \ ,$$

con $\omega^2 = k/m$, la cui soluzione generale è come è noto

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \ ,$$

o equivalentemente

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \ ,$$

o anche

$$x(t) = Ce^{i\omega t} + \bar{C}e^{-i\omega t} \ ,$$

ove la barra denota la coniugazione (in modo da avere soluzioni reali per t reale). Da una forma all'altra si passa facilmente ponendo $a = A\cos\varphi$, $b = -A\sin\varphi$, ovvero $C = \frac{A}{2}e^{i\varphi}$, $\bar{C} = \frac{A}{2}e^{-i\varphi}$, o infine $a = C + \bar{C}$, $b = i(C - \bar{C})$.

Un esempio forse meno familiare è

[2)] Ad esempio le equazioni $\dot{x}^2 = t$, $x = \dot{x}t + \dot{x}^2$ non sono in forma normale. Per uno studio delle equazioni non poste in forma normale, cioè della forma $f(\dot{x}, x, t) = 0$, si veda V.I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti (Roma, 1989), Cap.1.3.

[3)] Invece la funzione $x(t) = t^3$, ad esempio, non è soluzione, perché per tale funzione si ha $\dot{x}(t) = 3t^2$, $\ddot{x}(t) = 6t$ e non vale $\ddot{x}(t) = 0$ per ogni t.

[4)] Infatti, se $\ddot{x} = 0$, ovvero $\frac{dv}{dt} = 0$, allora è necessariamente $v(t) = a$ e quindi $\frac{dx}{dt} = a$, sicché $x(t) = at + b$.

iii. il *repulsore armonico*, detto anche *pendolo rivoltato*,[5] di equazione

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0 \ ,$$

la cui soluzione generale è[6]

$$x(t) = ae^{\omega t} + be^{-\omega t}$$

(o equivalentemente $x(t) = A\cosh\omega t + B\sinh\omega t$).

Un'equazione differenziale del secondo ordine $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$ si dice *autonoma* se f non dipende da t; la forza si dice puramente *posizionale* se f non dipende dalla velocità $\dot{x}$. I tre esempi sopra riportati sono evidentemente autonomi, con forze posizionali. L'equazione si dice poi *lineare omogenea*, brevemente lineare, se f è funzione lineare di $x, \dot{x}$ (f è un polinomio omogeneo di grado uno nelle due variabili x e $\dot{x}$; non sono lineari $\ddot{x} = x^2$, $\ddot{x} = \tan x$, o $\ddot{x} = x\dot{x}$). I tre esempi sopra riportati sono evidentemente lineari. Per le quazioni lineari (e solo per esse!) vale il *principio di sovrapposizione*, ovvero l'integrale generale si ottiene come combinazione lineare di soluzioni. Aggiungendo a f un termine costante si ottiene un equazione *lineare non omogenea*; si verifica immediatamente che l'integrale generale si ottiene sommando all'integrale generale della corrispondente equazione omogenea, detta *equazione omogenea associata*, una qualunque soluzione, detta soluzione particolare, dell'equazione non omogenea. Cosí il *moto dei gravi*, $\ddot{x} = -g$, ha soluzione generale $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$, mentre l'*oscillatore armonico pesante*, $\ddot{x} = -\omega^2 x - g$, ha soluzione generale $a\cos\omega t + b\sin\omega t - g/\omega^2$.

Un esempio classico di equazione non lineare (autonoma, con forza posizionale) è

iv. il *pendolo*,

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$$

($\omega^2 = g/l$, dove g è l'accelerazione di gravità e l la lunghezza del pendolo), la cui soluzione generale richiede già funzioni ellittiche, non propriamente elementari.

Le equazioni che si incontrano in meccanica sono in generale non lineari, e solo in qualche caso, come avremo modo di discutere, le loro soluzioni sono in qualche senso approssimate da soluzioni di corrispondenti equazioni lineari.[7] La linearizzazione di

---

[5] Si tratta infatti della linearizzazione del pendolo attorno alla posizione di equilibrio instabile, allo stesso modo in cui $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ è la linearizzazione del pendolo attorno alla posizione di equilibrio stabile (si veda più avanti). Una facile interpretazione dell'equazione è quella di punto materiale un campo di forza centrifugo (punto vincolato a una retta che ruota uniformemente con velocità angolare ω; si veda, al capitolo 2, il paragrafo sui moti relativi).

[6] Si osservi l'analogia formale con la soluzione dell'equazione dell'oscillatore armonico espressa per mezzo di esponenziali immaginari. La differenza è evidentemente dovuta alla differenza di segno di fronte ad ω^2: da una equazione all'altra si passa sostituendo ω con $i\omega$.

[7] E' un fatto significativo tuttavia che diverse equazioni alle derivate parziali per sistemi continui, di interesse fondamentale per la fisica, sono invece lineari: tipicamente l'equazione di Schroedinger per la meccanica quantistica, le equazioni di Maxwell per l'elettromagnetismo (nel vuoto o con correnti assegnate: nel problema generale in cui le correnti sono esse stesse incognite, le equazioni di Maxwell non sono più lineari), e inoltre l'equazione della corda vibrante e l'equazione del calore. In alcuni casi tuttavia si tratta ancora di equazioni approssimanti equazioni non lineari.

un'equazione attorno a un suo punto di equilibrio (o punto singolare) verrà discussa in un prossimo paragrafo.

- **Osservazione.** Abbiamo qui considerato, a titolo di esempio, alcune semplici equazioni differenziali relative a punti materiali la cui posizione è individuata da una sola coordinata x (sistemi con un solo "grado di libertà"). In alcuni casi (moto libero, caduta dei gravi) la riduzione a una sola coordinata è naturale, in quanto l'equazione di Newton si presenta disaccoppiata in tre equazioni scalari, che si possono affrontare separatamente. In altri casi (si pensi al pendolo) la riduzione è invece dovuta a un fatto meno banale, cioè alla presenza di un vincolo; la trattazione generale dei sistemi vincolati sarà fatta nel terzo capitolo. Un altro caso interessante in cui, anche in assenza di vincoli, ci si riduce a una sola coordinata, è quello in cui vi siano opportune costanti del moto (si veda più avanti); un caso significativo è quello del moto centrale, per il quale, come si vedrà, grazie alla conservazione del momento angolare ci si può ridurre a una opportuna equazione scalare per la sola coordinata radiale. Lo studio qualitativo delle equazioni differenziali, cui è dedicato questo primo capitolo, prescinde comunque dal problema della deduzione, o giustificazione delle equazioni, a partire dai principi della dinamica; tale problema sarà affrontato nei capitoli successivi.

1.1.2 *Esempi di forze dipendenti dalla velocità e (o) dal tempo; cicli limite (cenno)*

Il caso più noto di *forza dipendente dalla velocità* è quello dell'attrito viscoso, con forza lineare $-w\dot{x}$ ($w > 0$). Aggiungendo tale forza alla caduta dei gravi si ottiene

v. la *caduta frenata*, $\ddot{x} = -\beta\dot{x} - g$, $\beta = w/m$, di cui si scrive facimente[8] l'integrale generale nella forma $x(t) = v_\infty t + ae^{-\beta t} + b$, con $v_\infty = -g/\beta$ velocità asintotica, o velocità limite.

Aggiungendo l'attrito viscoso all'oscillatore armonico si trova poi

vi. l'*oscillatore armonico smorzato* $m\ddot{x} = -kx - w\dot{x}$, ovvero, posto $2\mu = w/m > 0$,

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0 \ ;$$

in tal caso la soluzione generale[9] ha forma assai diversa secondo che si abbia *grande smorzamento* ($\mu > \omega$) o *piccolo smorzamento* ($\mu < \omega$): nel primo caso infatti si ha

$$x(t) = ae^{-\mu_1 t} + be^{-\mu_2 t} \ , \qquad \mu_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} > 0 \ ,$$

---

[8] Ci si riporta a una equazione di primo ordine, lineare non omogenea, per le velocità, $\dot{v} = -\beta v - g$, la cui soluzione è immediata; poi si integra.

[9] Per dedurla, cerchiamo soluzioni particolari della forma $x(t) = e^{\lambda t}$; deve essere allora $(\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$, ovvero $\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2 = 0$, $\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$, e si trovano così due soluzioni particolari (tranne nel caso eccezionale $\mu = \omega$). Per combinazione lineare si ha direttamente l'espressione data nel testo nel caso di grande smorzamento. Nel caso di piccolo smorzamento si trova invece $x(t) = e^{-\mu t}(Ce^{i\sigma t} + \bar{C}e^{-i\sigma t})$, che si riduce immediatamente alla forma data nel testo. Nel caso critico $\mu = \omega$, con equazione $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \mu^2 x = 0$, si verifica subito che una soluzione particolare è $x(t) = te^{-\mu t}$, sicché la soluzione generale è $x(t) = e^{-\mu t}(a + bt)$.

mentre per piccolo smorzamento si trova

$$x(t) = e^{-\mu t}(a\cos\sigma t + b\sin\sigma t)\ , \qquad \sigma = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} > 0\ .$$

Per $\mu = \omega$ si ha il cosiddettto *smorzamento critico*, e la soluzione si verifica essere $(a + bt)e^{-\mu t}$.

In questi esempi la forza di attrito è sempre di segno contrario a quello della velocità ed è quindi evidente che essa tende a smorzare il moto (come mostra esplicitamente la soluzione analitica, e si confermerà più sotto in maniera qualitativa usando il teorema dell'energia cinetica). Può anche considerarsi formalmente il caso di "attrito negativo" $\ddot{x} - 2\mu\dot{x} + \omega x = 0$, $\mu > 0$, in cui l'ampiezza del moto viene esaltata anziché smorzata; tale idealizzazione si può utilizzare per rappresentare delle situazioni in cui viene compiuto dall'esterno del lavoro sul sistema.

Un caso alquanto importante di coesistenza di attrito positivo e negativo in un'equazione non lineare è quello dell'*equazione di Van der Pol*

$$\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0\ , \qquad \beta > 0$$

in cui si ha formalmente un attrito positivo per grandi x ($|x| > 1$) e attrito negativo per piccoli x ($|x| < 1$). In tal caso si ha l'interessantissimo fenomeno del *ciclo limite*, di cui si dirà in seguito: per moti di grande ampiezza prevale l'attrito positivo, e l'ampiezza si riduce; per moti di piccola ampiezza prevale l'attrito negativo, a l'ampiezza cresce; per uno e un solo moto critico i due effetti si compensano, e il moto è periodico. Si dice in tal caso che si ha un *ciclo limite* (attrattivo). Il fenomeno del ciclo limite è importante: il ciclo limite è un moto di ampiezza e periodo ben definiti, indipendenti dalle condizioni iniziali, e costituisce il cuore del funzionamento di qualunque orologio. L'equazione di Van der Pol fu introdotta attorno al 1920 per descrivere le oscillazioni in circuiti elettrici amplificati (allora con un triodo), mentre il concetto di ciclo limite fu introdotto da Poincaré già alla fine del secolo scorso.

Accenniamo di passaggio a un esempio elementare di forza di attrito non lineare, introdotto da Newton per la caduta dei gravi con resistenza proporzionale al quadrato della velocità $m\ddot{x} = -mg - a\dot{x}^2\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$.[10] Un altro esempio semplice ma interessante è quello del pendolo smorzato linearmente con in più anche una forzante costante, di equazione

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \alpha\sin x + \gamma = 0\ , \qquad \alpha, \beta > 0\ ;$$

tale sistema descrive l'essenza della dinamica della cosiddetta "risonanza spin-orbita" (accoppiamanto tra moto orbitale e rotazione propria) in meccanica celeste.[11]

Si hanno poi sistemi *non autonomi*, cioè con forze dipendenti dal tempo. L'esempio più noto, che studieremo in dettaglio più avanti, è quello delle oscillazioni forzate

---

[10] Questa equazione si riduce a un'equazione del primo ordine per la velocità, precisamente $\dot{v} = -g(1 + b^2v^2)$, con $b^2 = \frac{a}{mg}$. Per separazione di variabili essa si integra facilmente e si trova (A. Sommerfeld, *Lezioni di Fisica Teorica I, Meccanica*, Zanichelli (Bologna, 1984) §1.3) $v(t) = -\frac{1}{b}\tan(bgt)$.

[11] Il fatto ad esempio che la luna rivolga sempre la stessa faccia alla terra; si veda J.Henrard, *Spin-orbit resonance and the adiabatic invariant*, in S.Ferraz Mello e W.Sessin eds,...

(con o senza attrito) $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = C\cos\Omega t$, ove la *forzante* è sinusoidale; più in generale si può avere, ancora nel caso lineare, una forzante periodica di periodo T assegnato: $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = F(t)$ con $F(t+T) = F(t)$ (che conduce in maniera naturale all'introduzione delle serie di Fourier), o anche una forzante non periodica. Il problema tipico che ci si pone allora è quale sia la "risposta" (la soluzione $x(t)$) per ogni assegnato "ingresso" (la forzante $F(t)$); è questo l'ambito della cosiddetta *teoria dei sistemi*, assai importante in molti rami dell'ingegneria e dell'elettronica. Quando poi si consideri un caso non lineare con forzante periodica, ad esempio l'equazione del pendolo forzato

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = C\cos\Omega t \ ,$$

ci si imbatte in un sistema *sostanzialmente* più complicato di tutti quelli visti sopra; si tratta infatti del più semplice esempio di equazione differenziale che porta a moti cosiddetti *caotici*, già intuiti da Poincaré nel 1896, messi in luce da Levinson, Littlewood e altri attorno al 1950 in modelli tipo Van der Pol forzato (per lo studio dei radar), e osservati poi in numerosissimi studi numerici (simulazioni al calcolatore, basate sulla risoluzione numerica approssimata delle equazioni del moto) da Hénon e altri a partire dal 1964. Un breve studio numerico sul pendolo forzato, riproducibile con poca fatica su un qualunque calcolatore, è riportato in appendice.

- **Osservazione.** E' a volte utile ridurre i parametri presenti in una equazione, tramite l'introduzione di unità di misura adattate all'equazione studiata. Ad esempio, se introduciamo al posto di t la variabile adimensionale $\tau = \omega t$, allora si ha $\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x$; indicando ancora con un punto la derivata rispetto a τ, l'equazione dell'oscillatore armonico prende allora la forma adimensionale $\ddot{x} + x = 0$ (priva di costanti), mentre per l'oscillatore armonico smorzato otteniamo $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + x = 0$, ove compare la sola costante adimensionale $\beta = \mu/\omega$. La possibilità di eliminare ogni costante nell'equazione dell'oscillatore armonico sta a significare che tutti gli oscillatori armonici si identificano, se osservati ciascuno sulla sua propria scala di tempo. Ciò non si può dire per l'oscillatore smorzato: oscillatori con β diverso sono sostanzialmente diversi (si pensi alla differenza tra i casi di piccolo smorzamento, $\beta < 1$, e grande smorzamento, $\beta > 1$). Il procedimento di riduzione delle costanti si può eseguire su qualunque equazione, fino a che non vi restano che costanti adimensionali (ciò è già stato fatto per l'equazione di Van der Pol sopra citata, si veda oltre). La versione completamente adimensionale delle equazioni va tuttavia usata ove è veramente utile, e non ovunque per principio: trattazioni troppo adimensionali perdono a volte la trasparenza fisica.

1.1.3 *Un esempio non meccanico: il sistema di Lotka–Volterra*

Allarghiamo ora un pochino il nostro orizzonte introducendo esempi semplici di tipo non meccanico, tratti dal campo affascinante della dinamica delle popolazioni. Cominciamo dall'elementarissima equazione lineare del primo ordine

$$\dot{x} = \alpha x \ ,$$

che per $\alpha > 0$ rappresenta la crescita nel tempo di una popolazione il cui ritmo di crescita sia proporzionale alla popolazione stessa; per $\alpha < 0$ rappresenta il decadimento radioattivo. La soluzione è esponenziale, $x(t) = ae^{\alpha t}$ (crescita "malthusiana", dal nome dell'economista inglese Malthus, fine '700). Un modello un po' più realistico per la crescita di una singola popolazione è

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2 \ , \qquad \alpha \ , \ \beta \ > 0$$

(se gli individui diventano troppi si ostacolano). Senza bisogno di scrivere esplicitamente la soluzione,[12)] si comprende subito il comportamento qualitativo del sistema: si vede infatti immediatamente che esiste la soluzione stazionaria (cioè costante) $x(t) = c = \alpha/\beta$ (oltre naturalmente alla soluzione banale $x(t) = 0$), e che x cresce se è compreso tra zero e c, e cala se maggiore di c; se ne deduce facilmente che (per ogni dato iniziale positivo; si ritorni qui dopo aver visto il teorema di esistenza e unicità) la soluzione $x(t)$ tende a c per $t \to \infty$.

- **Esercizio 1.1:** Come deve essere fatta f nell'equazione $\dot{x} = f(x)$ perchè si abbia un comportamento simile?

Veniamo a equazioni di tipo non meccanico un po' piu interessanti, che generalizzano in un certo senso il caso meccanico. Tutti gli esempi meccanici considerati sopra, del tipo $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$, si riducono facilmente a un sistema di due equazioni diferenziali del primo ordine in forma normale; il modo più consueto è quello di scrivere

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \ . \end{cases} \tag{1.3}$$

Ma il più generale sistema del primo ordine in forma normale (nel piano) è della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, y, t) \\ \dot{y} = f(x, y, t) \end{cases} \tag{1.4}$$

(il nome delle variabili, v oppure y, è arbitrario), che si riduce alla forma (1.3) per $g(x, y, t) = y$. Un esempio significativo del caso più generale è quello del sistema di *Lotka–Volterra* (1930 circa)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \ . \tag{1.5}$$

L'interpretazione classica è la seguente. Vi sono due specie di pesci, prede e predatori, rispettivamente in quantità x, y. Nel caso $\beta = \delta = 0$ le due equazioni sono separate (mancanza di interazione) e si hanno le soluzioni $x(t) = ae^{\alpha t}, y(t) = be^{-\gamma t}$, ovvero crescita e decrescita esponenziale: i pesci piccoli si nutrono del materiale a disposizione nel mare e crescono indefinitamente, mentre i pesci grossi, che potrebbero cibarsi solo dei pesci piccoli e non del materiale disperso nel mare, muoiono. All'accendersi dell'interazione ($\beta, \delta \neq 0$) i pesci grossi mangiano quelli piccoli e il tasso di crescita di y, per x abbastanza grande, diventa positivo, mentre, per y abbastanza grande, diventa

[12)] Che peraltro si trova facilmente: separando le variabili si ha $\mathrm{d}x/(\alpha x - \beta x^2) = \mathrm{d}t$; integrando si trova $x(t) = \alpha/(\beta + ae^{-\alpha t})$, con a costante arbitraria.

negativo il tasso di crescita di x (il prodotto xy nei termini di interazione corrisponde a un effetto proporzionale alla probabilità di incontro). Si vede subito allora che esistono due soluzioni particolari stazionarie, precisamente la soluzione banale $x(t) = y(t) = 0$ (morte), ma anche la soluzione interessante $x(t) = \frac{\gamma}{\delta}, y(t) = \frac{\alpha}{\beta}$ (vita!). Mostreremo più avanti che si hanno soluzioni oscillanti attorno a questa, con massimi e minimi succedentisi per $x(t), y(t)$ tra loro sfasati, come era stato osservato empiricamente da un conoscente di Volterra su dati di pesca nell'Adriatico.[13)]

1.1.4 *Il teorema di esistenza e unicità e il problema ai dati iniziali (o di Cauchy)*

Il passaggio dall'equazione del secondo ordine $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$ al sistema di due equazioni del primo ordine $\dot{x} = v$, $\dot{v} = f(x, v)$ è significativo, in particolare, in relazione al *teorema di esistenza e unicità* (e dipendenza continua dai dati iniziali e dai parametri), che si applica[14)] a equazioni del primo ordine in forma normale in $\mathbb{R}^n$,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \ , \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ , \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \ . \tag{1.6}$$

Ricordiamo che, se $\mathbf{x}(t)$ è una soluzione[15)] di (1.6), la condizione

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \ , \tag{1.7}$$

dove $\mathbf{x}_0$ è un assegnato vettore di $\mathbb{R}^n$, si dice *condizione iniziale*, mentre $\mathbf{x}_0$ si dice *dato iniziale*. Il teorema di esistenza e unicità afferma che sotto elementari ipotesi di regolarità su $\mathbf{f}$, esiste ed è unica la soluzione per ogni dato iniziale $\mathbf{x}_0$. Una possibile formulazione è la seguente:[16)]

---

13) Il modello di Lotka-Volterra è usato anhe in economia. Si veda ad esempio A. Medio, *Teoria nonlineare del ciclo economico*, Il Mulino (Bologna, 1975). Per un'introduzione generale alla dinamica in economia, si veda G.Gandolfo, *Economic Dynamics: Methods and Models*, North-Holland,1980. Per problemi di biomatematica si veda anche il capitolo 12 (*Ecology*) del bellissimo libro: M.W. Hirsch e S. Smale, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra,* Academic Press (New York, 1974).

14) Il teorema si dimostra in realtà senza varianti in spazi infinito-dimensionali normati (spazi di Banach).

15) Dire che $\mathbf{x}(t)$ è soluzione significa, evidentemente, che si ha $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ identicamente in t.

16) Riportiamo qui l'argomento originario di Newton, che oggi viene considerato di carattere euristico, e fu poi reso rigoroso da Cauchy; tale argomento si applica a funzioni sviluppabili in serie, e prescinde da questioni di convergenza. Consideriamo per semplicità di notazione il caso di una sola variabile e autonomo, cioè l'equazione $\dot{x} = f(x)$, e mostriamo come la condizione iniziale $x(0) = x_0$ determini univocamente la soluzione. A tale scopo si scrive $x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{x}(0)t^2 + \cdots$, e si osserva che tutti i coefficienti sono determinati dalla condizione iniziale e dall'equazione stessa: infatti, si ha $\dot{x}(0) = f(x_0)$, $\ddot{x}(0) = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}(0) = f'(x(0))\dot{x}(0) = f'(x_0)f(x_0)$, e così via. Analogamente si procede per l'equazione $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$, e lo sviluppo in serie della soluzione $x(t)$ risulta determinato dai due numeri $x(0)$, $\dot{x}(0)$. Come vedremo in un prossimo capitolo, nel caso delle equazioni a derivate parziali gli sviluppi in serie che si ottengono analogamente non risultano sempre determinati da condizioni iniziali analoghe a quelle qui considerate, e tale fatto è rilevante per la classificazione delle equazioni alle derivate parziali.

Proposizione 1.1: *Se* $\mathbf{f}$ *è localmente lipshitziana*[17] *in un aperto* U*, allora per ogni* $\mathbf{x}_0 \in U$ *esistono un intervallo* $(-\tau, \tau)$ *e un'unica soluzione* $\mathbf{x}(t)$ *dell'equazione, definita per* $t \in (-\tau, \tau)$*, tale che sia verificata la (1.7).*

Sotto facili ipotesi, per le quali rinviamo ai testi di analisi (ad esempio che $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$ cresca al più linearmente con $\|\mathbf{x}\|$, oppure che $x(t)$ sia a priori limitata a un insieme compatto, per esempio per la conservazione dell'energia, si veda oltre), la soluzione è prolungabile a ogni $t \in \mathbb{R}$, ovvero si ha $\tau = \infty$. Tali ipotesi sono sempre soddisfatte in sistemi fisici, e le assumeremo implicitamente.[18] Una comoda notazione per la soluzione con dato iniziale $\mathbf{x}_0$ è $\mathbf{x}(x_0, t)$.

Si dimostra poi che la soluzione, *per ogni tempo finito*, dipende con regolarità dal dato iniziale e da eventuali parametri[19] che figurino in $\mathbf{f}$ (ad esempio da ω nell'equazione $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$), con la stessa regolarità di $\mathbf{f}$. In particolare, per quanto riguarda la dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale, si dimostra che

Proposizione 1.2: *Esistono costanti* $C, \lambda > 0$ *tali che per ogni* t *per cui la soluzione è definita risulta*

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0') - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| < C \, \|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\| \, e^{\lambda |t|} \ . \tag{1.8}$$

Per λ si può prendere la costante di Lipshitz di $\mathbf{f}$. Si osservi che la continuità si ha per ogni tempo finito, ma che *non c'è alcuna uniformità in* t, e tantomeno è continuo il comportamento asintotico per $t \to \infty$.

- **Osservazione.** E' facile vedere che la stima (1.8), esponenziale in t, in casi particolari è migliorabile; nel caso particolarissimo dell'oscillatore armonico ($\mathbf{x} = (x, v)$; equazioni $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -\omega^2 x$) segue facilmente dalla soluzione generale una stima uniforme in t (*Esercizio:* si deduca tale stima). Ma per sistemi come il repulsore armonico la dipendenza esponenziale è ottimale e non migliorabile (*Esercizio:* lo si verifichi, usando la soluzione generale). Quando la (1.8) è ottimale, si dice che si ha "dipendenza sensibile dal dato iniziale", e questo comportamento è alla radice dei cosiddetti moti caotici nei sistemi non lineari.

- **Osservazione.** Riscriviamo la (1.8) nella forma agile $d_t \leq C d_0 e^{\lambda |t|}$, ove d_t denota la distanza tra le due soluzioni al tempo t. Se tale stima è ottimale, allora è evidente che una minima incertezza nel dato iniziale conduce a una sostanziale

---

17) Ricordiamo che f si dice localmente lipshitziana se esiste $\lambda > 0$ (costante di Lipshitz) tale che per ogni coppia $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ con $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ sufficientemente piccolo si ha $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$; per questo è sufficiente che $\mathbf{f}$ sia di classe $\mathcal{C}^1$. Un esempio in $\mathbb{R}^1$ con $\mathbf{f}$ *non* lipshitziana attorno all'origine è l'equazione $\dot{x} = \sqrt{x}$; si verifica facilmente che per $x_0 = 0$ si perde l'unicità: si hanno infatti le soluzioni $x(t) = 0$, $x(t) = \frac{1}{4} t^2$, o anche $x(t) = 0$ per $t \leq s$, $x(t) = \frac{1}{4}(t - s)^2$ per $t > s$, con qualsiasi $s \geq 0$.

18) Un classico controesempio in $\mathbb{R}^1$ è $\dot{x} = 1 + x^2$, risolta da $x(t) = \tan(t - t_0)$ per ogni t_0; $x(t)$ è definita solo per $|t - t_0| < \pi/2$ (x va all'infinito in un tempo finito).

19) La dipendenza regolare dai parametri è una conseguenza banale della dipendenza regolare dal dato iniziale: se si ha l'equazione $\dot{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e μ parametro reale, basta pensare anche μ come variabile, cioè mettersi in $\mathbb{R}^{n+1}$, e completare l'equazione con $\dot{\mu} = 0$.

imprevedibilità dei moti in tempi brevi. Ad esempio, possiamo chiederci dopo quanto tempo la distanza d_t raggiunge un prefissato valore "grande" D; si trova subito $|t| = \lambda^{-1} \log D/d_0$, e per quanto si riduca d_0 o si aumenti D, nell'ambito dei valori fisicamente sensati, $|t|$ resta piccolo.

- **Esercizio 1.2:** Si consideri un pendolo rivoltato di lunghezza 10 cm, e lo si approssimi con un repulsore armonico di $\omega = 10$. Si supponga di collocarlo con velocità esattamente nulla in un intorno di raggio d_0 della posizione di equilibrio $x = 0$. Dopo quanto tempo ci aspettiamo che cada ad esempio fino a D = un radiante, imprevedibilmente verso destra o verso sinistra, se $d_0 = 10^{-3}$ radianti? (Risp: meno di un secondo). E se (già al di là della ragionevolezza fisica) prendiamo $d_0 = 10^{-6}$ o 10^{-12} radianti? (Risp: meno di due e meno di quattro secondi rispettivamente).

Particolarmente significativo è il caso in cui la funzione vettoriale $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ è indipendente dal tempo; si dice allora che si ha un *sistema autonomo*, con equazione

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \ , \tag{1.9}$$

e la funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice anche *campo vettoriale*. Per i sistemi autonomi il problema centrale che ci si pone è allora quello di dedurre per quanto possibile le proprietà qualitative delle soluzioni, cioè dei moti, dalle proprietà dei campi vettoriali; l'ideale, invero assai lontano, sarebbe quello di giungere a una buona classificazione. E' questo uno dei punti di incontro più significativi di fisica, analisi e geometria.

- **Osservazione.** Per i sistemi autonomi, si verifica immediatamente che se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione di $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, allora anche $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t - t_0)$ è soluzione; se il primo moto soddisfa la condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, il secondo soddisfa la condizione "iniziale", che generalizza la (1.7),

$$\mathbf{x}'(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

  La scelta dell'istante iniziale t_0 è cosí del tutto irrilevante per i sistemi autonomi: a parità di dato iniziale $\mathbf{x}_0$, la soluzione sostanzialmente non dipende da t_0, precisamente nel senso che soluzioni diverse si riportano banalmente l'una all'altra per traslazione di t (cambiamento dell'origine dei tempi). Ciò non resta vero per sistemi non autonomi, per i quali invece una traslazione di t altera l'equazione in modo significativo.[20)]

- **Osservazione.** Tutti i sistemi diventano banalmente autonomi, se pensati nello spazio allargato $\mathbb{R}^{n+1}$ anzichè in $\mathbb{R}^n$. Infatti, assegnato il sistema non autonomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ in $\mathbb{R}^n$, ad esso resta naturalmente associato il sistema autonomo in $\mathbb{R}^{n+1}$ (spazio esteso)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, s) \\ \dot{s} = 1 \ , \end{cases} \tag{1.10}$$

[20)] Una parziale interessante eccezione è quella dei sistemi con dipendenza periodica da t (in particolare, il caso di forzante periodica cui si è sopra accennato): per tali sistemi la scelta di t_0 resta irrilevante, se ristretta a multipli interi del periodo.

con dato iniziale completato da $s_0 = 0$. In realtà però questa considerazione formale non elimina la sostanziale specificità dei sistemi non autonomi (il minimo che si può dire è che sistemi come (1.10) sono fortemente non tipici), che è bene trattare separatamente in quei pochi casi fisici in cui tali sistemi si presentano.

Riprendiamo le equazioni del secondo ordine di immediato interesse per la meccanica, restringendoci al caso autonomo $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$. In vista del teorema di esistenza e unicità, è dunque naturale passare a considerare il cosiddetto *piano di fase*[21] dei vettori $\mathbf{x} = (x, v)$, perché un punto di tale piano individua univocamente una soluzione. E' evidente, in particolare, che la soluzione generale – si vedano tutti i casi in cui abbiamo potuto scriverla esplicitamente – dipende necessariamente da due parametri arbitrari, e anzi, che tali parametri possono sempre venire determinati dal dato iniziale $\mathbf{x}_0 = (x_0, v_0)$. E' particolarmente significativo, in molti casi, scrivere esplicitamente la soluzione $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ in termini dei dati iniziali. Ad esempio, per l'oscillatore armonico è $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, sicché si calcola $x_0 = x(0) = a$, $v_0 = \dot{x}(0) = \omega b$, e i dati iniziali x_0, v_0 si possono usare come arbitrarie, scrivendo la soluzione nella forma

$$x(t, x_0, v_0) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \ ;$$

per il repulsore armonico si trova invece immediatamente $x_0 = a + b$, $v_0 = \omega(a - b)$, e dunque $a = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{v_0}{\omega})$, $b = \frac{1}{2}(x_0 - \frac{v_0}{\omega})$, $x(t, x_0, v_0) = \frac{1}{2}[(x_0 + \frac{v_0}{\omega})e^{\omega t} + (x_0 - \frac{v_0}{\omega})e^{-\omega t}]$.

- **Esercizio 1.3:** Si scriva esplicitamente la soluzione come funzione di t e del dato iniziale per l'oscillatore armonico debolmente smorzato, $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$; si esegua poi il limite $\mu \to 0$, mostrando che (coerentemente con la continuità della soluzione al variare dei parametri) *a ogni t fissato* si riottiene la soluzione dell'oscillatore armonico non smorzato (corrispondente a porre $\mu = 0$ fin dall'inizio). Cosa succede invece prendendo prima il limite $t \to \infty$, e poi il limite $\mu \to 0$?

Consideriamo ora un generico sistema autonomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e supponiamo che le soluzioni siano prolungabili per $t \in \mathbb{R}$; in virtù del teorema di Cauchy, come si è visto, per ogni dato iniziale $\mathbf{x}_0$ è definita univocamente la soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})$. Se si riguarda $\mathbf{x}_0$ come fissato, allora al variare di t si ha una *curva* in $\mathbb{R}^n$, corrispondente al movimento individuato da $\mathbf{x}_0$. Se invece si fissa t, ad esempio $t = 1$, allora la funzione $\mathbf{x}$ fornisce un'applicazione, o mappa (*map, mapping*), di $\mathbb{R}^n$ in sé, precisamente l'applicazione[22] φ^t definita da $\varphi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, che ad ogni dato iniziale $\mathbf{x}_0$ fa corrispondere il suo *evoluto al tempo t*. Al variare di t in $\mathbb{R}$ si ha così una famiglia a un parametro di applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in sé. Tale famiglia $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ si dice definire il *flusso* relativo al campo vettoriale $\mathbf{f}$; il nome deriva, evidentemente, dal caso $n = 3$, in cui si descrive il fluire delle particelle di un fluido in corrispondenza a un assegnato campo

---

[21] Distingueremo più avanti, studiando la cosiddetta meccanica "lagrangiana" e "hamiltoniana" tra *spazio delle fasi* e *spazio degli stati* (o spazio degli atti di moto, nel linguaggio più tradizionale della meccanica); a questo livello la distinzione è irrilevante, e il nome piano di fase, benchè improprio, è tradizionale.

[22] Per $t = 1$ tale applicazione è detta *applicazione al tempo* 1, ovvero *time–one map*.

di velocità $\mathbf{f}$ (si veda avanti).[23] Si dimostra facilmente che la famiglia a un parametro $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ è un gruppo, con elemento neutro φ^0, inverso φ^{-t}, e legge di composizione[24]

$$\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s} \ .$$

Si rivedano in questa luce gli esempi sopra riportati. In particolare per l'oscillatore armonico si ha $\varphi^t(x_0, v_0) = (x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, -\omega x_0 \sin\omega t + v_0 \cos\omega t)$, cosicchè per $\omega = 1$ si ha il consueto gruppo delle rotazioni del piano di fase (ciò resta vero, ovviamente, per ogni ω, pur di compiere un banale cambiamento di variabili.)

- **Osservazione (movimenti e orbite o traiettorie).** Conformemente all'uso consueto della meccanica elementare, distingueremo tra i *movimenti*, cioè le funzioni $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$, che ad ogni tempo assegnano una posizione in $\mathbb{R}^n$, e le corrispondenti *traiettorie o orbite*: per ogni movimento, la traiettoria o orbita è l'immagine della corrispondente applicazione $t \to \mathbf{x}(t)$, cioè l'insieme delle posizioni in $\mathbb{R}^n$ relative a tutti i tempi, senza tener conto della *legge oraria* con cui essa è percorsa. Per sistemi autonomi, in virtù della (1.9), le traiettorie risultano essere tangenti in ogni punto al corrispondente vettore del campo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Una conseguenza facile ma importantissma del teorma di esistenza e unicità è che *per sistemi autonomi, traiettorie diverse non si intersecano.*

- **Esercizio 1.4:** Si esegua formalmente la dimostrazione (si usa la proprietà discussa sopra in base alla quale, se $x(t)$ è soluzione, lo è anche $x'(t) = x(t - t_0)$).

Tornando al problema generale delle equazioni differenziali ordinarie, si osservi tuttavia che non sempre si ha a che fare con un problema "ai dati iniziali", o, come anche si dice, "di Cauchy". Già in meccanica elementare, ad esempio, ci si può porre il problema di determinare la velocità iniziale (incognita) affinché la soluzione passi per un assegnato punto x_1 a un assegnato tempo t_1 (oltre che per x_0 al tempo $t_0 = 0$); si pensi ad esempio ai problemi di balistica. Considerando per semplicità il moto per inerzia, con soluzione generale $x(t) = at + b$, si ha che le condizioni $x(0) = x_0$ e $x(t_1) = x_1$ comportano $b = x_0$, e $a = \frac{(x_1 - x_0)}{t_1}$, e dunque si ha $x(t) = \frac{(x_1 - x_0)}{t_1}t + x_0$. Ad esempio, a tale tipo di problema (*problema di Sturm-Liouville*) portano i metodi di separazione delle variabili nelle equazioni alle derivate parziali che vedremo più avanti, tipicamente le equazioni della corda vibrante e della membrana vibrante.

1.1.5 Le soluzioni di equilibrio (punti singolari); la statica come caso particolare della

[23] Questo secondo punto di vista è particolarmente significativo in connessione con lo studio della meccanica statistica, quando si voglia considerare l'evoluzione temporale simultaneamente per un insieme statistico (*ensemble*) di dati iniziali; ad esempio si penseranno i dati iniziali distribuiti con una certa *densità di probabilità,* e si cercherà come questa evolva nel tempo. Da questo punto di vista è significativo, in particolare, chiedersi se la trasformazione φ^t conservi o no una misura definita nello spazio delle fasi, che possa associarsi alla probabilità considerata; ad esempio, si vede facilmente che la misura di Lebesgue nel piano delle fasi si conserva per l'equazione $\ddot{x} = f(x)$ (forze autonome posizionali), mentre decresce (per tempi positivi) per l'oscillatore smorzato $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$.

[24] Questa proprietà, si osservi, dipende in modo essenziale dal fatto che il sistema sia autonomo.

dinamica

Consideriamo un sistema autonomo retto dall'equazione differenziale $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, per un assegnato campo vettoriale $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. E' spontaneo ricercare se esistano delle soluzioni particolari, e anzitutto delle soluzioni costanti $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}$, dove $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ è un vettore costante; nel caso meccanico $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, ciò equivale a cercare una soluzione particolare $x(t) = c$ (e quindi $v(t) = 0$, ovvero $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c} = (c, 0)$). I punti $\mathbf{c}$ di $\mathbb{R}^n$ corrispondenti a soluzioni costanti dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si dicono *punti di equilibrio*, e le soluzioni corrispondenti si dicono *stazionarie*. Nel linguaggio dell'analisi, i punti in cui un campo vettoriale $\mathbf{f}$ si annulla si dicono *punti singolari* del campo. Grazie al teorema di esistenza e unicità si ha allora che

Proposizione 1.3: *I punti di equilibrio dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sono tutti e soli i punti singolari di $\mathbf{f}$.*

Dimostrazione. Per definizione, il movimento $\mathbf{x}(t)$ è soluzione se vale identicamente (cioè per ogni t) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$; ma per il movimento $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}$ vale $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$ e segue l'asserto. *Q.E.D.*

Corollario 1.1: *Nel caso meccanico autonomo, $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, i punti singolari sono del tipo $(c, 0)$. Nel piano di fase (x, v) i punti singolari giacciono allora sull'asse delle ascisse, e sono quelli per cui si annulla la forza, $f(c, 0) = 0$.*

Nel caso meccanico c stesso si dice comunemente, con piccola confusione di linguaggio, punto di equilibrio; meglio sarebbe chiamare $\mathbf{c}$ punto di equilibrio, e c configurazione, o posizione di equilibrio.

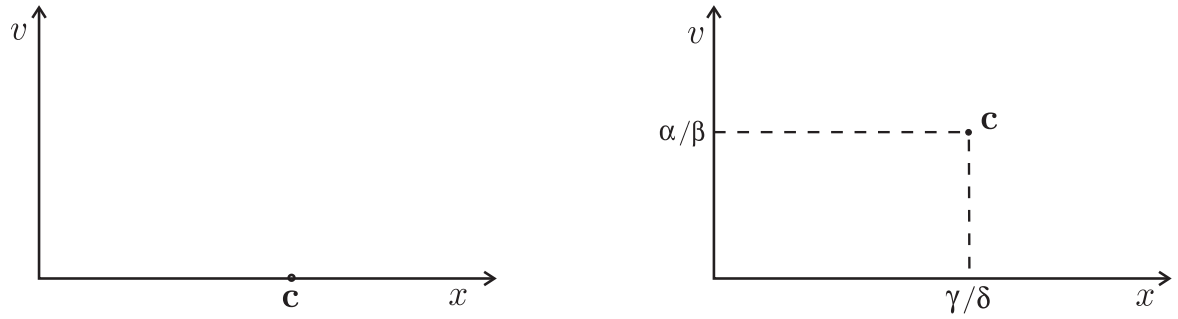


Fig. 1.1. *Posizione dei punti di equilibrio nei sistemi meccanici (sinistra) e nel sistema di Lotka–Volterra (destra)*

Ad esempio, per la particella libera (moto per inerzia, $\ddot{x} = 0$) ogni punto dell'asse x è di equilibrio, mentre per il moto dei gravi ($\ddot{x} = -g$) non si ha alcun punto di equilibrio. Un caso come quello della particella libera, in cui si ha un continuo di punti di equilibrio, è non tipico: genericamente i punti di equilibrio sono isolati. Così, per l'oscillatore armonico e per il repulsore armonico l'origine è l'unico punto di equilibrio, e lo stesso vale nei corispondenti casi con smorzamento lineare, e in generale per le equazioni lineari omogenee; per il pendolo $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ si ha equilibrio per $\sin x = 0$

ovvero per $x = 0$ (punto di equilibrio in basso, che vedremo essere stabile) e per $x = \pi$ (mod 2π) (punto di equilibrio in alto — pendolo rivoltato — che vedremo essere instabile). Nel caso non meccanico dell'equazione di Lotka–Volterra i punti singolari si hanno quando vale contemporaneamente $x(\alpha - \beta y) = 0$, $y(\gamma - \delta x) = 0$, ovvero come già si è anticipato per $x = y = 0$ e per $x = \frac{\gamma}{\delta}$, $y = \frac{\alpha}{\beta}$; si osservi che il secondo punto è fuori dall'asse delle x.

Qualche rara volta si conoscono altre soluzioni particolari oltre quelle di equilibrio; è il caso ad esempio delle quazioni di Lotka–Volterra, per le quali si riconosce immediatamente che $(x, y)(t) = (x_0 e^{\alpha t}, 0)$ e $(x, y)(t) = (0, y_0 e^{-\gamma t})$ sono soluzioni particolari.

1.1.6 Stabilità dei punti di equilibrio

Quando si siano determinate le soluzioni di equilibrio, risolvendo l'equazione non differenziale $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, ci si domanda cosa avvenga dei dati iniziali prossimi a quelli di equilibrio; ad esempio le soluzioni corrispondenti possono restare indefinitamente presso il punto di equilibrio, o sfuggirne via tutte, o solo alcune. Una prima formalizzazione di tale ordine di idee si ottiene introducendo la nozione di *stabilità (alla Ljapunov) di un punto singolare*.

Definizione 1.1: *Un punto di equilibrio* $\mathbf{c}$ *di* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *si dice stabile (o stabile nel futuro, o stabile nel passato) se per ogni intorno U di* $\mathbf{c}$ *esiste un intorno V di* $\mathbf{c}$*, tale che ogni movimento* $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ *con dato iniziale* $\mathbf{x}_0$ *in V resta in U per ogni tempo (o rispettivamente per tutti i tempi positivi, o per tutti i tempi negativi).*

Dunque "si resta vicino a $\mathbf{c}$ quanto si vuole pur di partire abbastanza vicino";[25] si veda la Fig. 2. Dalla definizione è chiaro che la nozione di stabilità di un punto singolare è *intrinseca*, nel senso che non dipende dalle particolari coordinate scelte. Infatti, nella definizione si fa riferimento soltanto a proprietà topologiche, che sono invarianti per omeomorfismi.

Definizione 1.2: *Un punto di equilibrio* $\mathbf{c}$ *di* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *si dice instabile se non è stabile.*

- **Osservazione.** L'instabilità non comporta che tutte le orbite sfuggano dal punto singolare, ma soltanto che non tutte le orbite gli restino vicine; così per l'instabilità è sufficiente che qualche orbita sfugga dal punto singolare.

Una proprietà più restrittiva è quella di *stabilità asintotica*.

Definizione 1.3: *Un punto singolare* $\mathbf{c}$ *si dice asintoticamente stabile per tempi positivi (negativi) quando: (a)è stabile per* $t \geq 0$ $(t \leq 0)$*, e inoltre (b) esiste un intorno* V^* *tale*

[25] La nozione di stabilità alla Ljapunov è una significativa formalizzazione, matematicamente precisa, dell'idea intuitiva di stabilità. In tempi recenti è stata presa in considerazione (da Littlewood, Moser, Nekhoroshev e altri, ma l'idea risale a Boltzmann e Jeans) la possibilità di fare riferimento a una nozione più debole, in cui si richieda che il restare in prossimità del punto singolare si verifichi fino ad un tempo fissato "abbastanza lungo". Tuttavia una formalizzazione matematica di questo punto di vista non è agevole.

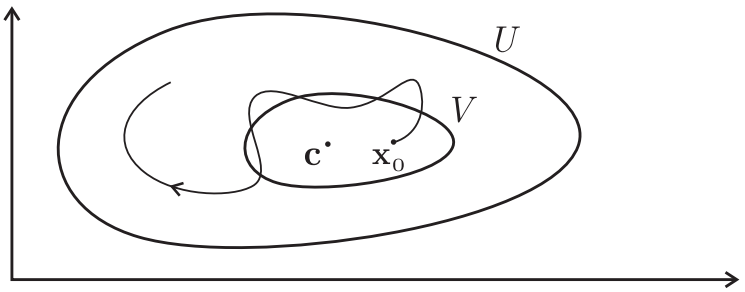


Fig. 1.2. *Definizione di stabilità di un punto singolare*

che per tutti i dati iniziali in V^* i movimenti tendono a $\mathbf{c}$ *per* $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$. [26)]

Nei casi in cui sia nota la soluzione generale in forma esplicita, è possibile stabilire direttamente se un punto di equilibrio è stabile o instabile. Così, per la particella libera ogni punto di equilibrio è instabile (se ci si sposta dall'equilibrio imponendo una piccola velocità iniziale, il punto si allontana indefinitamente dal punto iniziale nel piano di fase). Invece è stabile l'origine $(0,0)$ per l'oscillatore armonico: essendo $x(t,x_0,v_0) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$, $v(t,x_0,v_0) = -x_0\omega\sin\omega t + v_0\cos\omega t$, si trova $|x(t)| + |\frac{v(t)}{\omega}| \leq 2(|x_0| + |\frac{v_0}{\omega}|)$, donde segue subito l'asserto. Per il repulsore armonico, con $x(t,x_0,v_0)$ data sopra, si verifica immediatamente che si ha instabilità per tempi positivi: addirittura si trova $|x(t)| \to \infty$, per $t \to +\infty$, per tutti i dati iniziali ad eccezione di quelli della forma $x_0 = -\frac{v_0}{\omega}$, per i quali si trova $(x(t),v(t)) \to (0,0)$; analogamente si vede che si ha instabilità per tempi negativi. La cosa interessante, ovviamente, è lo studio della stabilità dei punti di equilibrio quando, come è tipico, non si conosce la soluzione esatta. Ci sono casi facili, come i sistemi a un grado di libertà con forze indipendenti dalla velocità (come gli esempi appena riportati), per i quali la stabilità si accerta facilmente utilizzando il teorema di conservazione dell'energia. Un criterio di stabilità particolarmente importante (metodo di Ljapunov) sarà discusso poco più avanti.

1.1.7 Le costanti del moto; l'energia

Veniamo ora alla nozione di *funzione invariante,* o *costante del moto* (si usa anche l'espressione *integrale primo*) per un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\mathbb{R}^n$.

[26)] La sola proprietà (b) non implica la proprietà di stabilità (a). Un tipico controesempio è dato dal sistema descritto, in coordinate polari piane (r,θ), dalle equazioni $\dot{r} = 1 - r$, $\dot{\theta} = 1 - \cos\theta$. Tale sistema, ben definito nell'aperto costituito dal piano privato dell'origine, ha $r = 1$, $\theta = 0$ come unico punto singolare. Si vede facilmente che tale punto non è stabile (ciò segue dal fatto che si ha $\dot{\theta} > 0$ per $\theta \neq 0$, e dunque in ogni intorno del punto singolare vi sono punti che se ne allontanano a distanza finita); d'altra parte (tenendo conto che dalla prima equazione segue $r \to 1$ per $t \to +\infty$) è facile convincersi che tutti i punti del piano (privato dell'origine) tendono al punto singolare, per $t \to +\infty$, eventualmente dopo "aver compiuto un giro". Questo controesempio risulterà più chiaro dopo aver visto lo studio qualitativo illustrato nei prossimi paragrafi.

Definizione 1.4: *Una funzione $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice funzione invariante o costante del moto per l'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ se vale $I(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = I(\mathbf{x}_0)$ per ogni t, per ogni soluzione $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ dell'equazione data.*

Dunque il valore di una funzione invariante resta costante durante il moto (perciò il nome costante del moto), ma dipende evidentemente dal dato iniziale $\mathbf{x}_0$. Ciò si può esprimere anche nel modo seguente. L'equazione $I(\mathbf{x}) = c$, per un fissato valore c nel codominio della funzione I, definisce (con minime proprietà di regolarità su I) una superficie $(n-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^n$, diciamola S_c; anzi, al variare di c nel codominio di I, si ha una famiglia di tali superfici che costituisce, come si dice, una foliazione (stratificazione) di $\mathbb{R}^n$. Orbene, se I è una costante del moto, ognuna di tali superfici S_c è costituita da orbite del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$; in altri termini, le singole traiettorie o orbite possono raggrupparsi in famiglie che costituiscono superfici di livello della funzione I.

- **Osservazione.** Più in generale, un insieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice *invariante* (per tutti i tempi) per l'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, se il suo evoluto $\varphi^t(A)$ a ogni tempo t coincide con A; equivalentemente, se A è costituito di orbite dell'equazione.[27] Per definizione ogni orbita è un insieme invariante. Se poi esiste una costante del moto I, avviene il fatto non banale che tali orbite sono riunite in famiglie che sono *superfici di livello* di I. Così anche ogni unione di superfici di livello di I, ad esempio un insieme definito da $c_1 < I(\mathbf{x}) < c_2$, è invariante.[28].

Il più semplice esempio di costante del moto è l'*energia totale* nel caso di un sistema meccanico a un grado di libertà, autonomo e con forza puramente posizionale, cioè retto da equazione $m\ddot{x} = F(x)$, ovvero $\ddot{x} = f(x)$, $f = F/m$. Con minime proprietà di regolarità su F (F integrabile; basta ampiamente che F sia di classe $\mathcal{C}^1$, anche a tratti), esiste una primitiva U di F, cioè una funzione la cui derivata $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U(x)$ coincide con F. Si conserva allora la quantità $E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 - U(x)$. Il modo più classico di dimostrare la conservazione di E, e anzi di dedurre la forma di E, è quello di moltiplicare per $\dot{x}$ ambo i membri dell'equazione $m\ddot{x} = F(x)$. Per il teorema di derivazione di una funzione composta si ha subito $\dot{x}\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}\dot{x}^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}mv^2$, e similmente $\dot{x}F(x) = \dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(x)$; la funzione $E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 - U(x)$ è pertanto una costante del moto.

La funzione $T \equiv \frac{1}{2}mv^2 \equiv \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ si dice *energia cinetica*, la funzione $V(x) = -U(x)$ si dice *energia potenziale*, e infine la funzione $E(x, v) = T + V$ si dice *energia totale*. Ricordiamo casi tipici di energia potenziale: particella libera, moto dei gravi, oscillatore armonico, repulsore armonico, pendolo, rispettivamente con $F(x) = 0$, $-mg$,

---

[27] Chiaramente può essere anche significativo dire che un insieme A è *invariante per tempi positivi* se $\varphi^t(A) \subset A$ per ogni $t > 0$.

[28] A partire dal 1954 (teorema di Kolmogorov–Arnold–Moser) si è cominciato a capire che si presentano situazioni molto generali in cui esistono insiemi invarianti che sono superfici di livello di una funzione regolare $I = I(\mathbf{x})$, senza che tale funzione sia invariante; in altri termini, le superfici di livello $I(\mathbf{x}) = c$ sono invarianti solo per certi (e non per tutti i possibili) dati iniziali.

$-kx$, $+kx$, $-k\sin x$, ed energia potenziale $V(x) = 0$, mgx, $\frac{1}{2}kx^2$, $-\frac{1}{2}kx^2$, $-k\cos x$.

Si tenga presente anche il seguente modo, in certo senso più spontaneo, di dimostrare la conservazione dell'energia. Scrivendo l'equazione $\ddot{x} = f(x)$ come sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \ , \end{cases}$$

e "dividendo le due equazioni membro a membro"[29] si ottiene una singola equazione in cui è stato eliminato il tempo, precisamente $\frac{dv}{dx} = \frac{f(x)}{v}$, ovvero anche, nel linguaggio delle forme differenziali, $vdv = f(x)dx$. Ricordando che si ha $f(x)\mathrm{d}x = -(1/m)\mathrm{d}V(x)$, segue allora $\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2 + V(x)) = 0$ e dunque $\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \text{cost}$.

- **Esercizio 1.5:** Si controlli in maniera analoga che anche il sistema di Lotka–Volterra ammette un integrale primo, precisamente $I(x, y) = \gamma \log x - \delta x + \alpha \log y - \beta y$ [*Suggerimento:* dal sistema (6) si ottiene immediatamente $\frac{\gamma - \delta x}{x}\mathrm{d}x + \frac{\alpha - \beta y}{y}\mathrm{d}y = 0$, e la conclusione è immediata]. Si studi la forma delle curve di livello $I(x, y) = c$ [Si trova che esse sono curv chiuse attorno al punto singolare $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$].

Nel caso in cui la forza F dipenda, oltre che da x, anche da $\dot{x}$ e t, non varrà più il teorema di conservazione dell'energia. Varrà tuttavia in generale il cosiddetto *teorema dell'energia cinetica* $\dot{T} = F\dot{x}$ (basta moltiplicare per $\dot{x}$ l'equazione $m\ddot{x} = F$ e ricordare $m\dot{x}\ddot{x} = \dot{T}$); il prodotto $F\dot{x}$ si dice *potenza* della forza. Se F è decomposta in una parte conservativa (indipendente da $\dot{x}$ e t) e in una parte non conservativa $F(x, \dot{x}, t) = F_1(x) + F_2(x, \dot{x}, t) \equiv -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x) + F_2(x, \dot{x}, t)$, ha ancora senso definire l'energia $E = T + V$, e allora si avrà evidentemente $\dot{E} = F_2\dot{x}$. Nel caso dell'oscillatore armonico smorzato, con equazione $m\ddot{x} = -kx - w\dot{x}$, il teorema dell'energia cinetica fornisce $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2) = -w\dot{x}^2$, o anche $\dot{E} = -w\dot{x}^2$ se si definisce $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$; poiché l'energia E rappresenta sostanzialmente il quadrato della distanza del punto (x, v) dall'origine nel piano di fase, è chiaro che tale distanza decresce col tempo (salvo che nel momento in cui $v = 0$, per il quale si ha $\dot{E} = 0$) se $w > 0$, e resta invece costante nel caso dell'oscillatore non smorzato, $w = 0$ (cresce per attrito negativo, $w < 0$). Dunque appare chiaro, prima ancora di una dimostrazione formale che daremo tra breve con il teorema di Ljapunov, come l'origine sia un punto di equilibrio stabile per $w = 0$, e asintoticamente stabile (per tempi positivi) per $w > 0$.

- **Osservazione (derivata di Lie).** Abbiamo sopra preso in considerazione le costanti del moto, ovvero le funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ che restano costanti lungo tutti i movimenti di un assegnato sistema dinamico retto dall'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Più in generale, data una qualunque funzione $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, detta comunemente in questo contesto *variabile dinamica*, è spontaneo considerare il suo andamento temporale

---

[29] Se $(x(t), v(t))$ è una soluzione del sistema considerato, ed è $\dot{x} \neq 0$, allora è definita la funzione inversa $t = t(x)$, e quindi anche la funzione composta $v(t(x))$, brevemente $v(x)$, la cui derivata è data da $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} / \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{f}{v}$. Analogamente, se $\dot{v} \neq 0$, si ha $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = \frac{v}{f}$. Nel linguaggio delle forme differenziali, l'equazione della curva nel piano delle fasi è definita dall'annullarsi della forma $f(x)\mathrm{d}x - v\mathrm{d}v$. Tale singola equazione tiene la sostanza del sistema originario, anche se non fornisce direttamente la *legge oraria*; quest'ultima si ottiene poi dall'equazione $\dot{x} = v(x)$.

lungo un movimento $\mathbf{x}(t)$, ovvero la funzione composta $G(\mathbf{x}(t))$, e per il teorema di derivazione di una funzione composta si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(\mathbf{x}(t)) = \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} f_i\left(\mathbf{x}(t)\right) \ .$$

E' chiaro dunque che, per ogni campo vettoriale $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e per ogni variabile dinamica $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, è significativo introdurre la nuova variabile dinamica $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{f}}G)(\mathbf{x}) \ = \sum_i f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial G}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \ . \tag{1.11}$$

Tale variabile dinamica, che viene detta *derivata di Lie* della variabile dinamica G rispetto al campo $\mathbf{f}$, ha dunque il significato di fornire, nel generico punto $\mathbf{x}$, la derivata rispetto al tempo della funzione G composta con un movimento di $\mathbf{f}$, nell'istante in cui esso "passa per il punto $\mathbf{x}$". Si ha in particolare, per un qualunque movimento $\mathbf{x}(t)$,

$$G(\mathbf{x}(t)) - G(\mathbf{x}(0)) = \int_0^t \big(\mathcal{L}_{\mathbf{f}}G\big)(\mathbf{x}(t'))\,\mathrm{d}t' \ .$$

Per l'arbitrarietà di G, si può anche leggere la (1.11) come definizione di un operatore di derivazione $\mathcal{L}$, associato al campo vettoriale $\mathbf{f}$, che agisce sulle funzioni derivabili $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; in particolare, $\mathcal{L}$ manda in sé lo spazio delle funzioni infinitamente derivabili. Con questo linguaggio si può dire che una variabile dinamica regolare $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è funzione invariante per l'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, se e solo se si ha $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}G \equiv 0$.[30] In un contesto in cui il campo vettoriale $\mathbf{f}$ possa ritenersi fissato, può essere conveniente usare la notazione espressiva $\dot{G}(\mathbf{x})$ per $(\mathcal{L}_{\mathbf{f}}G)(\mathbf{x})$.

- **Osservazione (aspetti locali e globali delle costanti del moto).** Il problema dell'esistenza di costanti del moto per un assegnato sistema di equazioni differenziali è tra i più interessanti della meccanica, ma anche tra i più delicati. Esso sarà ripreso diverse volte nel seguito. E' bene tuttavia chiarire fin d'ora che tale problema è significativo soltanto se si ricercano costanti del moto in qualche senso "globali" (ad esempio definite, se non in tutto lo spazio, almeno in un suo sottoinsieme invariante, al quale si può pensare ristretto il movimento). In ambito strettamente locale, più precisamente in un piccolo intorno U di un punto $\mathbf{x}$ non singolare, il problema è invece banale: in tal caso si dimostra infatti che esistono sempre $n-1$ costanti del moto (regolari e indipendenti). L'idea è semplice: se

[30] La nozione di costante del moto si generalizza spontaneamente al caso di equazioni non autonome $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ e variabili dinamiche dipendenti esplicitamente dal tempo. Una funzione $I = I(\mathbf{x}, t)$ si dice funzione invariante o costante del moto per l'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ se vale $I(\mathbf{x}(t), t) = I(\mathbf{x}_0, 0)$ per ogni tempo t, per ogni soluzione $\mathbf{x}(t)$ dell'equazione data. E' allora evidente che condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $G = G(\mathbf{x}, t)$ sia costante del moto è che si abbia $\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} f_i \equiv 0$.

in $\mathbf{x}$ si ha $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$, si può sempre trovare una superficie Σ trasversale alle orbite che attraversano U (*sezione di Poincaré locale*). Introdotte allora ad arbitrio $n-1$ coordinate $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ su Σ, le $n-1$ funzioni cercate sono quelle che assegnano a ogni punto $\mathbf{x}$ di U le $n-1$ coordinate $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ dell'intersezione $\mathbf{x}_0$ della traiettoria con Σ.[31)] Per particolarissimi sistemi, come la particella libera o l'oscillatore armonico o il repulsore armonico, avviene che le costanti del moto locali così costruite si possono prolungare lungo le orbite complete, dando luogo a costanti del moto globali; in generale tuttavia ciò non è possibile (a meno di perdere le più elementari proprietà di regolarità delle funzioni, come la continuità e anzi la stessa misurabilità). Si pensi all'oscillatore armonico smorzato: se esistesse una funzione $I(x, v)$ costante lungo le orbite (e diversa da un'orbita all'altra), allora, poiché tutti i movimenti convergono all'origine per $t \to +\infty$, avverrebbe che in ogni intorno dell'origine, per quanto piccolo, I presenterebbe fluttuazioni di ampiezza costante, dovendo assumere tutti i valori caratteristici di tutte le orbite, e dunque non sarebbe in alcun modo regolare.

- **Esercizio 1.6:** Si consideri un sistema di due oscillatori armonici disaccoppiati: $\dot{x}_i = v_i$, $\dot{v}_i = -\omega_i^2 x_i$, $i = 1, 2$. Si dimostri che esistono sempre due costanti del moto globali, mentre una terza costante del moto esiste se e solo se ω_2/ω_1 è un numero razionale (attenzione: la seconda parte è tutt'altro che banale).

1.1.8 Il teorema di Ljapunov per la stabilità dei punti di equilibrio

Si è visto sopra, su un esempio, come la stabilità di un punto di equilibrio per un'equazione $\ddot{x} = f(x)$ possa essere determinata considerando il comportamento nel tempo di un'opportuna funzione (l'energia, nell'esempio sopra citato). Questa idea è alla base del teorema di Ljapunov, che fornisce un criterio sufficiente a garantire la stabilità, o la stabilità asintotica, di un punto singolare. Precisamente, si ha la seguente

Proposizione 1.4 (Ljapunov): *Sia* $\mathbf{c}$ *un punto di equilibrio per l'equazione differenziale*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

in $\mathbb{R}^n$. *Se in un intorno* U_0 *di* $\mathbf{c}$ *esiste una variabile dinamica differenziabile* $\mathcal{W} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *("*funzione di Ljapunov*"), che gode delle due seguenti proprietà:*

a) $\mathcal{W}$ *ha un minimo stretto in* $\mathbf{c}$, *ovvero si ha* $\mathcal{W}(\mathbf{x}) > \mathcal{W}(\mathbf{c})$ *in* $U_0 \backslash \mathbf{c}$;

b) *la sua derivata di Lie* $\dot{\mathcal{W}} = \mathcal{L}_{\mathbf{f}}\mathcal{W}$ *soddisfa la disuguaglianza* $\dot{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) \leq 0$ *in* U_0 *(ovvero,* $\mathcal{W}$ *è non crescente, come funzione di* t, *lungo ogni movimento in* U_0*),*

[31)] Non sarebbe difficile vedere, sulla base del teorema di esistenza e unicità (nella parte di dipendenza regolare dal dato iniziale) che si costruiscono in questo modo funzioni $U \to \mathbb{R}$ regolari. Si osservi anche che $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \tau)$, τ è il tempo di percorrenza da $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}$, sono buone coordinate in U; in queste coordinate le equazioni del moto diventano banali: $\dot{\sigma}_i = 0$, $0 \leq i \leq n-1$, e $\dot{\tau} = 1$.

allora $\mathbf{c}$ *è punto di equilibrio stabile per tempi positivi. Se poi* $\mathcal{W}$ *soddisfa la condizione, più forte di b):*

b') $\dot{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) < 0$ *per* $\mathbf{x} \in U_0 \backslash \mathbf{c}$,

allora $\mathbf{c}$ *è asintoticamente stabile per tempi positivi.*

Dimostrazione. Assumiamo innanzitutto b), e dimostriamo la stabilità di $\mathbf{c}$ per tempi positivi. Preso ad arbitrio un intorno U di $\mathbf{c}$, sia B una sfera aperta centrata in $\mathbf{c}$, e contenuta in $U \cap U_0$ assieme al suo bordo ∂B. Su ∂B (chiuso e limitato) la funzione $\mathcal{W}$ (continua) ammette un minimo l; se $\hat{\mathbf{x}} \in \partial B$ realizza il minimo, per a) sarà $l = \mathcal{W}(\hat{\mathbf{x}}) > \mathcal{W}(\mathbf{c})$ strettamente. Consideriamo allora l'insieme

$$V = \{\mathbf{x} \in B; \mathcal{W}(\mathbf{x}) < l\} \ ;$$

V è come richiesto un aperto contenente $\mathbf{c}$ (un intorno di $\mathbf{c}$). Ora è chiaro che, preso comunque $\mathbf{x}_0 \in V$, il corrispondente movimento $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ per $t > 0$ non può raggiungere ∂B: infatti, $\mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$ come funzione di t è monotona non crescente in virtù di b), perciò si ha $\mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) \leq \mathcal{W}(\mathbf{x}_0) < l$, mentre $\mathcal{W}(\mathbf{x}) \geq l$ su ∂B. Perciò, per $t \geq 0$ qualsiasi, risulta $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in B \subset U$, e la stabilità per tempi positivi è dimostrata.[32)]

Assumiamo ora b'), e proviamo la stabilità asintotica di $\mathbf{c}$ per tempi positivi; a tale scopo basta mostrare che, in aggiunta a quanto già provato, per ogni $\mathbf{x}_0$ appartenente all'insieme V sopra costruito si ha

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{c} \tag{1.12}$$

(l'insieme V^* che entra nella definizine di stabilità asintotica coincide in questo caso con l'insieme V stesso). Tenendo conto della continuità di $\mathcal{W}$, e del fatto che $\mathbf{c}$ è l'unico punto nel quale $\mathcal{W}$ assume il valore $\mathcal{W}(\mathbf{c})$, si vede immediatamente che la (1.12) equivale[33)] a

$$\lim_{t \to +\infty} \mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \mathcal{W}(\mathbf{c}) \ . \tag{1.13}$$

L'esistenza di un limite è ovvia: infatti, fissato $\mathbf{x}_0 \in V$, sappiamo che $\mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$, come funzione di t, è monotona non crescente, e inoltre è inferiormente limitata da $\mathcal{W}(\mathbf{c})$ (si osservi che, per quanto già dimostrato nella prima parte, $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ non esce in

---

[32)] In effetti, è facile vedere che, al di là di quanto richiesto nella definizione di stabilità, l'insieme V sopra costruito è addirittura invariante per tempi positivi. Di fatto, la dimostrazione del teorema si potrebbe anche dare formalizzando la elementare osservazione che insiemi del tipo

$$V_a = \{x \in U_0; \mathcal{W}(x) < a\} \ , \qquad a > \mathcal{W}(\mathbf{c}) \ ,$$

hanno, per a abbastanza prossimo a $\mathcal{W}(\mathbf{c})$, le due seguenti proprietà: (i) sono intorni di $\mathbf{c}$ semplicemente connessi, che si riducono al punto $\mathbf{c}$, quando a approssima $\mathcal{W}(\mathbf{c})$ (come segue dall'ipotesi a); (ii) sono insiemi invarianti per tempi positivi (come segue dalla proprietà b).

[33)] Formalmente si può dire ad esempio che, se non valesse la (1.12), allora si potrebbe trovare una sferetta $B' \subset B$ centrata in $\mathbf{c}$, tale che $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, pur contenuto in B, esce da B' per opportuni valori di t arbitrariamente grandi. Ma il minimo l di $\mathcal{W}$ sulla chiusura di $B \setminus B'$ è strettamente maggiore di $\mathcal{W}(\mathbf{c})$, e dunque per questi valori di t risulterebbe $\mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) \geq l > \mathcal{W}(\mathbf{c})$, contro l'esistenza del limite di $\mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$ a $\mathcal{W}(\mathbf{c})$.

particolare da U_0, perciò si possono usare le ipotesi del teorema); pertanto un limite λ esiste, e anzi si ha $\lambda \geq \mathcal{W}(\mathbf{c})$. Per assurdo, supponiamo $\lambda > \mathcal{W}(\mathbf{c})$. Allora, per definizione di limite, fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, per tutti i $t \geq T_\varepsilon$ opportuno sarà $\lambda \leq \mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) \leq \lambda + \varepsilon$ (si ricordi che al limite si arriva da sopra), cioè

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in A = \{\mathbf{x}; \lambda \leq \mathcal{W}(\mathbf{x}) \leq \lambda + \varepsilon\} \qquad \forall\, t \geq T_\varepsilon \ . \tag{1.14}$$

Usiamo ora la disuguaglianza stretta b'); per l'ipotesi assurda, $\mathbf{c} \notin A$, dunque il massimo di $\dot{\mathcal{W}}$ in A (che esiste, perchè A è compatto) è strettamente negativo:

$$\dot{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) \leq -\alpha < 0 \qquad \forall x \in A \ .$$

Pertanto $\mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$, come funzione di t, ha derivata negativa, non superiore a $-\alpha$, per $t \geq T_\varepsilon$. Per il teorema della media segue immediatamente

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}(T_\varepsilon + \tau, \mathbf{x}_0)) \leq \mathcal{W}(T_\varepsilon, \mathbf{x}_0) - \alpha\tau \leq \lambda + \varepsilon - \alpha\tau$$

per ogni $\tau > 0$, e per $\tau > \varepsilon/\alpha$ si va contro la (1.14). Per quanto detto sopra, ciò è sufficiente alla dimostrazione del teorema. *Q.E.D.*

- **Osservazioni.**
  - Se si invertono le disuguaglianze b) o b'), si ottiene la stabilità, o stabilità asintotica, per tempi negativi anziché positivi. Se b) è realizzata come uguaglianza, si ottiene la stabilità (non asintotica) per tutti i tempi.
  - Si noti che nella condizione a) la disuguaglianza è richiesta in senso stretto, cioè non può essere sostituita da $\geq$. Si ripensi al caso della particella libera, con energia $E = \frac{1}{2}mv^2$; si ha un continuo di punti di equilibrio, e non punti isolati, e la condizione a) per la funzione $\mathcal{W} \equiv E$ non è soddisfatta. Corrispondentemente, tali punti di equilibrio risultano essere instabili.
  - Vale la pena di sottolineare il fatto che il teorema di Ljapunov permette di ottenere informazioni sulla stabilità di un punto di equilibrio in modo rapido, e *senza bisogno di risolvere le equazioni del moto.* Come esercizio si dimostri, usando il teorema di Ljapunov, la stabilità del punto di equilibrio $x = \frac{\gamma}{\delta}, y = \frac{\alpha}{\beta}$ per le equazioni di Lotka–Volterra.
  - Il teorema di Ljapunov tuttavia non è costruttivo: esso infatti stabilisce un criterio per garantire la stabilità di un punto singolare, ma non dà alcuna indicazione sul modo di determinare concretamente una funzione di Ljapunov.

Corollario 1.2: *Si consideri un sistema meccanico autonomo con forze puramente posizionali,*

$$\dot{x} = v \ , \qquad \dot{v} = f(x) \ .$$

Se l'energia potenziale $V(x)$ ha un minimo isolato nel punto $x^* \in \mathbb{R}$, allora il punto singolare $\mathbf{c} = (x^*, 0) \in \mathbb{R}^2$ è stabile (per tutti i tempi).

Dimostrazione. Poiché l'energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$ è definita positiva come funzione di v, e si annulla per $v = 0$, allora l'energia totale $E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ ha un minimo isolato in $\mathbf{c}$, e dunque soddisfa la condizione a) del teorema; d'altra parte, E soddisfa

anche la condizione b), essendo una costante del moto, e dunque è una buona funzione di Ljapunov. *Q.E.D.*

Vedremo che questo risultato si estende in modo naturale a tutti i sistemi meccanici (sistemi lagrangiani a $n \geq 1$ gradi di libertà, si veda oltre), per i quali si può scrivere l'energia totale come somma di un'energia cinetica definita positiva e di un'energia potenziale: nei punti di minimo dell'energia potenziale l'equilibrio risulterà stabile (teorema di Lagrange–Dirichlet, presentato in queste note come corollario del teorema di Ljapunov, ma storicamente ben precedente).

- **Osservazione.** Restando nell'ambito dei sistemi meccanici autonomi sopra considerati, si osservi che la stabilità nel futuro persiste anche se si aggiunge alla forza un termine dissipativo, cioè un termine tale che si abbia sempre $\dot{E} \leq 0$. Tuttavia ciò non è sufficiente, in generale, a garantire la stabilità asintotica, che richiede la disuguaglianza stretta b'). Si noti che tale condizione più forte non è soddisfatta, ad esempio, nemmeno nel caso dell'oscillatore armonico smorzato (che pure sappiamo essere asintoticamente stabile), qualora si prenda come funzione di Ljapunov l'energia $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$, per la quale si ha $\dot{E} = -wv^2$: infatti, si ha $\dot{E} = 0$ su tutto l'asse $v = 0$, e non solo nel punto singolare. A questa difficoltà si può ovviare correggendo opportunamente la funzione di Ljapunov, come mostrato nell'appendice A. E' naturale chiedersi tuttavia se ciò sia veramente necessario: è chiaro infatti che in tale esempio, pur se in un particolare istante risulta $\dot{x} = 0$, e quindi $\dot{E} = 0$, anche se $x \neq 0$, tuttavia immediatamente prima e dopo risulta $\dot{E} < 0$, perché tutte le orbite (ad eccezione del punto di equilibrio) attraversano trasversalmente la retta $\dot{x} = 0$, e quindi non possono restarvi indefinitamente. Questa argomentazione si può rendere rigorosa in condizioni del tutto generali, dando luogo a una utilissima formulazione del teorema di Ljapunov, in cui si sostituisce la condizione b') con la condizione più debole

  b") *In U_0 risulta $\dot{\mathcal{W}} \leq 0$, e l'insieme ove è realizzata l'uguaglianza non contiene, al di fuori del punto singolare* $\mathbf{c}$*, alcuna orbita completa.*

  Omettiamo la dimostrazione, che presenta qualche complicazione in più (ma nessuna difficoltà sostanziale) rispetto alla dimostrazione riportata sopra.

1.1.9 I movimenti delle particelle fluide e le equazioni differenziali del primo ordine

Per concludere questo primo paragrafo introduttivo, facciamo rilevare che esiste un problema interessante di origine meccanica in cui si ha a che fare direttamente con un sistema di equazioni del primo ordine, a differenza della equazione di Newton $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$, che si presenta invece come un'equazione del secondo ordine. Infatti, quando si considera il moto di un fluido dal punto di vista cosiddetto euleriano, di cui si dirà a suo tempo, si determina mediante un'equazione alle derivate parziali il campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, il cui significato è di rappresentare la velocità $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}}$ della particella di fluido che si trovi in $\mathbf{x}$ al tempo t. Se dunque risolvendo l'equazione di

Eulero si è determinato il campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, si ha allora per le traiettorie $\mathbf{x}(t)$ delle particelle di fluido l'equazione alle derivate ordinarie in $\mathbb{R}^3$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \tag{1.15}$$

da intendersi nel senso consueto, cioè che una soluzione è una funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ per cui valga $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t),t)$ identicamente in t. Il caso più semplice è quello del fluido in quiete, con $\mathbf{u} = 0$, ovvero con equazione $\dot{\mathbf{x}} = 0$, che ha soluzione generale $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$. Analogamente nel caso $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b}$ è un vettore costante di $\mathbb{R}^3$, si ha l'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ con soluzione generale $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}t$. Un caso molto interessante, per cui si rimanda al capitolo sui fluidi, è quello del campo di velocità corrispondente alle onde di gravità.

Fino a poco tempo fa, pochissimi erano i casi di equazione del tipo (1.15) studiati effettivamente per assegnati campi di velocità di fluido. Tra i problemi studiati di recente (1985), segnaliamo il cosiddetto modello ABC (Arnold-Beltrami-Children), precisamente

$$\begin{cases} \dot{x} = A\sin z + C\cos y \\ \dot{y} = B\sin x + A\cos z \\ \dot{z} = C\sin y + B\cos x \end{cases} ;$$

tale modello è significativo anche per lo studio del campo magnetico terrestre.

1.2 Un caso tipico con trattazione qualitativa completa: i sistemi conservativi a un grado di libertà

I sistemi meccanici retti dall'equazione di Newton $m\ddot{x} = F(x,\dot{x},t)$, $x \in \mathbb{R}$, sono detti sistemi *a un grado di libertà*, con riferimento al fatto che vi è un'unica variabile reale x (o funzione incognita $x(t)$). Particolare interesse hanno i sistemi con forza F indipendente dal tempo (autonomi) e indipendente dalla velocità, ovvero retti da equazioni della forma $m\ddot{x} = F(x)$, per i quali si conserva sempre l'energia: come si è visto, se V (*energia potenziale*) è una primitiva di F cambiata di segno, $F(x) = -V'(x)$, e T denota l'energia cinetica, $T(v) = \frac{1}{2}mv^2$, $v = \dot{x}$, allora l'energia totale

$$E(x,v) = T(v) + V(x) \tag{1.16}$$

è un integrale primo, o costante del moto. Come immediata conseguenza, le soluzioni $x(t)$, con le corrispondenti $v(t) = \dot{x}(t)$, descrivono nel piano di fase x, v delle curve, che necessariamente giacciono sulle linee di livello di E. Lo studio della funzione E consente allora di determinare completamente le traiettorie (studio qualitativo), e all'occorrenza anche di dare una soluzione quantitativa, più precisamente di ridurre la soluzione dell'equazione differenziale, come si suol dire, a una *quadratura* (cioè al calcolo di un integrale).

Nel seguito, per evitare la ridondanza delle costanti, faremo riferimento non all'energia vera e propria, ma all'energia per unità di massa (ad esempio, $\frac{1}{2}(v^2 + \omega^2 x^2)$ per l'oscillatore armonico di equazione $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$), che continueremo a denotare con

$E(x, v)$, e a chiamare, seppur impropriamente, energia. Faremo inoltre riferimento alla "forma adimensionale" delle equazioni (ad esempio, $\ddot{x} + x = 0$ per l'oscillatore armonico), cui come si è visto ci si può sempre ricondurre.

1.2.1 *Esempi analitici*

Diamo prima tre esempi elementari di famiglie di curve di livello, e dunque di traiettorie (*ritratto in fase* o *phase portrait*), trattati analiticamente.

Particella libera, con equazione $\ddot{x} = 0$, ed energia $E = \frac{1}{2}v^2$. Le linee di livello dell'energia sono le rette $|v| = \text{cost}$, parallele all'asse delle x.

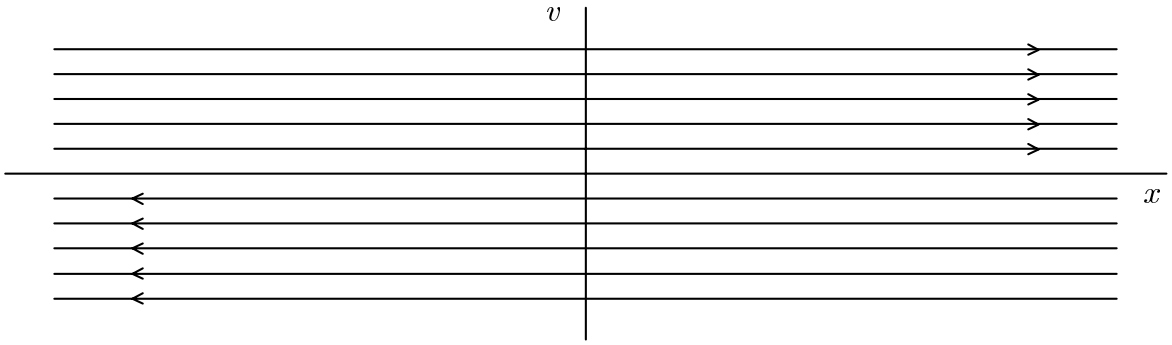


Fig. 1.3. *Ritratto in fase per la particella libera*

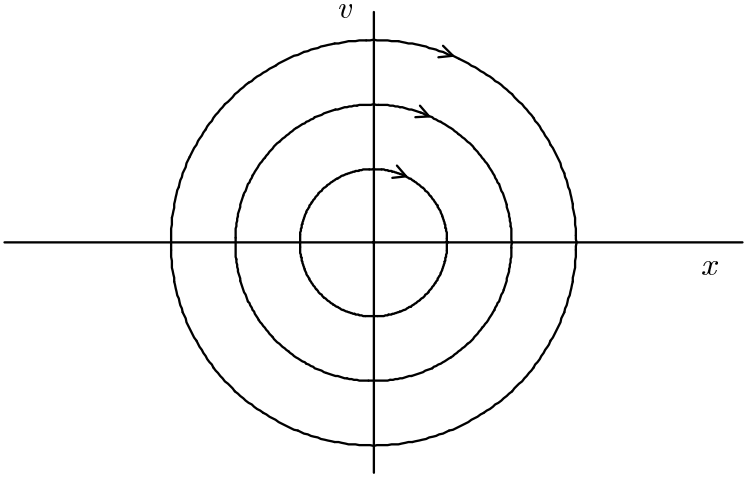


Fig. 1.4. *Ritratto in fase dell'oscillatore armonico: centro*

Oscillatore armonico, con equazione $\ddot{x} + x = 0$ ed energia $E = \frac{1}{2}(v^2 + x^2)$; le linee di livello sono cerchi con centro nell'origine e raggio $\sqrt{2E}$.

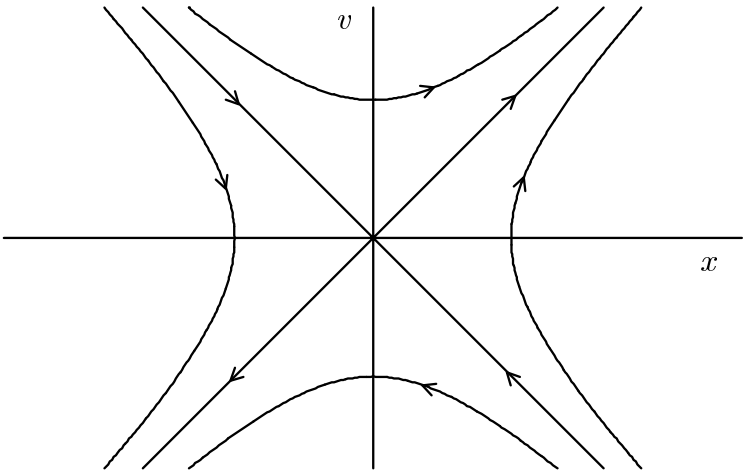


Fig. 1.5. *Ritratto in fase del repulsore armonico: sella (o colle)*

Repulsore armonico, con equazione $\ddot{x} - x = 0$, ed energia $E = \frac{1}{2}(v^2 - x^2)$. Le curve di livello sono iperboli equilatere, di equazione $\frac{v^2}{2E} - \frac{x^2}{2E} = 1$, aventi per asintoti le bisettrici del piano x, v. Può essere utile passare alle coordinate $\xi = v + x$, $\eta = v - x$, perché si ha allora $E = \frac{1}{2}\xi\eta$; dunque E si annulla per $\xi = 0$ e per $\eta = 0$, ovvero sulle due bisettrici del piano x, v, mentre si ha $E > 0$ per $|v| > |x|$ (ovvero "di sopra"), e invece $E < 0$ per $|v| < |x|$ ("di lato").

Si noti che sulle curve di livello si sono aggiunte delle "frecce" indicanti il senso di percorrenza delle curve; ciò è stato fatto in modo coerente con l'osservazione generale che nel semipiano superiore le frecce sono rivolte a destra e nel semipiano inferiore a sinistra (infatti il semipiano superiore è definito da $\dot{x} = v > 0$, e dunque x cresce col tempo).[34)]

Per la stessa ragione, le curve di livello, in generale, attraversano l'asse delle x solo "verticalmente"; infatti sull'asse delle x, definito da $v = 0$, è $\dot{x} = 0$, cioè "x non cresce né decresce". In maniera più formale si scrive l'equazione $\dot{x} = f(x)$ come sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} ;$$

come si è visto, eliminando il tempo si ottiene l'equazione per le curve di fase nella forma $v = v(x)$, e si ha $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{v}$: pertanto $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ diventa infinita per $v = 0$, a meno che non sia contemporaneamente $f(x) = 0$. Si vede così che l'attraversamento verticale dell'asse delle x è necessario fuori dai punti di equilibrio, nei quali invece il comportamento può essere, a priori, qualsiasi. Ad esempio, per il repulsore armonico le curve $v = x$ e $v = -x$ (corrispondenti a $E = 0$) attraversano obliquamente l'asse delle x nel punto di equilibrio $x = 0$. Si osservi che ciascuna di queste curve si decompone in tre

[34)] Si tenga presente tuttavia che la conclusione "nel semipiano superiore si va a destra" vale solo per i sistemi meccanici $\dot{x} = v$, $\dot{v} = f(x, v, t)$, e non per sistemi generali.

orbite, una delle quali si riduce proprio al punto di equilibrio $x(t) = 0$, $v(t) = 0$.

Si osservi che nel caso dell'oscillatore armonico l'origine è ancora un punto di equilibrio, e la corrispondente linea di livello ($E = 0$) degenera in quel solo punto; invece per la particella libera l'asse delle x costituisce un continuo di punti di equilibrio. Per la particella libera si dice talvolta che si ha un caso parabolico, mentre si ha un caso ellittico per l'oscillatore armonico e un caso iperbolico per il repulsore armonico; con altra terminologia, il punto di equilibrio dell'oscillatore armonico si dice essere un *centro* (per evidenti ragioni) mentre quello del repulsore armonico è chiamato *colle*, o *sella*. La ragione del nome sta nel fatto che le linee di livello descrivono appunto le linee di livello di un colle (inteso non come montagnola, ma come valico): si va verso le cime lungo l'asse v ($E > 0$ crescente), mentre si va verso le valli lungo l'asse delle x ($E < 0$ decrescente).

Abbiamo qui considerato, per l'oscillatore armonico e il repulsore armonico, il solo caso $\omega^2 = 1$; è evidente che per $\omega^2 \neq 1$ i cerchi sono mutati in ellissi, e corrispondentemente le iperboli non sono più equilatere.

1.2.2 Analisi qualitativa

Veniamo ora all'analisi qualitativa. Essa è basata sulla semplicissima osservazione che per definizione è $T = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$ (nulla solo per $v = 0$), sicché posto $E = T + V$ si ha

$$V \leq E \ .$$

La conservazione di E consente di leggere quest'ultima relazione come una *condizione sulla variabile*: avendo fissato il valore E dell'energia (ad esempio mediante i dati iniziali), ogni movimento $x(t)$ deve essere tale che valga $V(x(t)) \leq E$ e quindi, anche senza conoscere la soluzione $x(t)$, si ha per essa la restrizione $x(t) \in \mathcal{I}_E$, avendo posto

$$\mathcal{I}_E = \{x \in \mathbb{R};\ V(x) \leq E\} \ . \tag{1.17}$$

Consideriamo ad esempio i tre casi sopra citati. La particella libera è un caso molto speciale, perché V di fatto non dipende da x: per ogni valore $E \geq 0$ l'insieme $\mathcal{I}_E$ coincide con l'intero asse delle x; esso viene percorso tutto (in un senso o nell'altro, a seconda del valore di v) se $E > 0$, mentre non viene percorso se $E = 0$ (in quest'ultimo caso $\mathcal{I}_0$ si decompone in punti di equilibrio). Per l'oscillatore armonico si ha $E = \frac{1}{2}(v^2 + x^2) \geq 0$; si vede immediatamente che $\mathcal{I}_E$, per $E = 0$, si riduce a un sol punto, mentre per $E > 0$ è un intervallo percorso alternativamente nei due sensi.

Per $E > 0$ infatti, se si escludono gli estremi dell'intervallo $\mathcal{I}_E$ si ha sempre $T > 0$, e quindi $|\dot{x}| \neq 0$, cioè il punto si sposta a destra o a sinistra. Negli estremi si ha invece $T = 0$ (l'energia è puramente potenziale) e dunque il punto ha velocità istantanea nulla. Essendo però diversa da zero l'accelerazione (come segue da $\ddot{x} = -x$), il punto riprende a muoversi invertendo la velocità (*punti di inversione*), e si hanno necessariamente delle oscillazioni. Il grafico di V in funzione di x mostra come, durante le oscillazioni, l'energia si converta da potenziale in cinetica: andando verso il centro della *buca di potenziale* aumenta l'energia cinetica, e con essa il modulo della

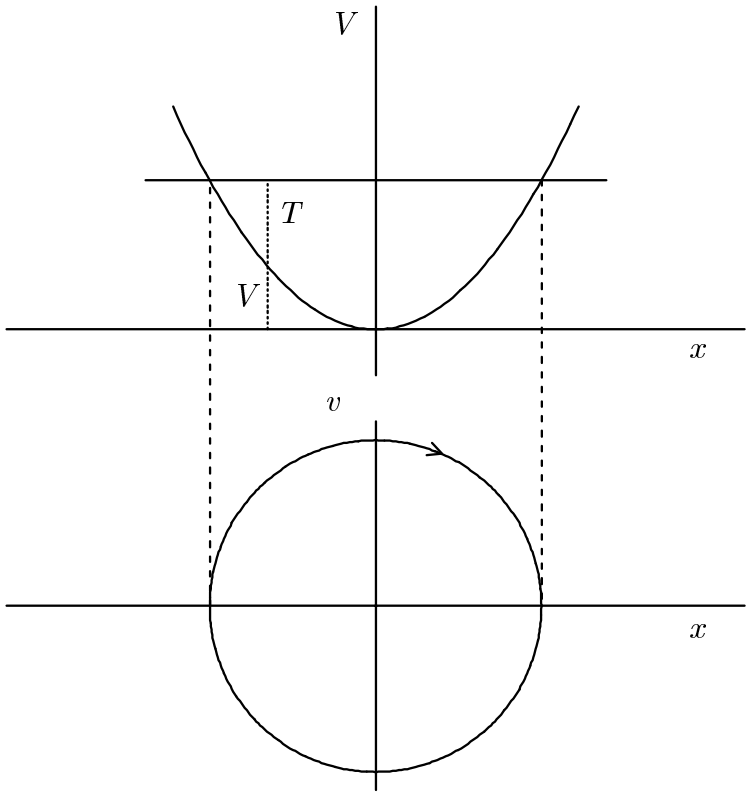


Fig. 1.6. *Grafico del potenziale e ritratto in fase per l'oscillatore armonico*

velocità, che diventa massimo in corrispondenza del minimo di V. Così le curve di fase (si veda la fig. 6) sono massimamente distanti dall'asse x in corrispondenza del minimo di V, mentre lo toccano, e anzi, per l'argomento dato sopra, lo attraversano verticalmente, nei punti di inversione (dove $V = E$). Si osservi inoltre che le curve di livello dell'energia sono simmetriche rispetto all'asse delle x (sono infatti definite da una condizione su $|v|$). Al variare di E si hanno tutte le possibili curve di fase; per $E = 0$ (minimo di V) la curva si riduce all'origine.

Poco più complessa è la discussione nel caso del repulsore armonico. Per $E = E_1 < 0$ l'insieme $\mathcal{I}_{E_1}$ è sconnesso (due semirette) e si hanno ancora punti di inversione laddove $V = E_1$; ad esempio, per un dato iniziale con $x_0 < 0$, il punto non riesce a raggiungere l'origine (non supera la *barriera di potenziale*) e viene "respinto indietro"; si hanno così due diverse traiettorie a seconda che sia $x_0 < 0$ o $x_0 > 0$. Nel caso $E = E_2 > 0$ è sempre $T > 0$, $\mathcal{I}_{E_2}$ coincide con l'asse delle x, e non si hanno inversioni: il punto supera la barriera di potenziale, e semplicemente l'energia cinetica diventa minima per $x = 0$. Come per la particella libera, si hanno due possibili movimenti distinti (ma con la stessa immagine per la funzione $x(t)$), a seconda del segno di v. Infine $\mathcal{I}_E$, nel caso "separante" $E = 0$, coincide ancora con l'asse delle x, ma le immagini dei possibili movimenti $x(t)$ sono tre (il punto $x = 0$, e le semirette $x > 0$, $x < 0$), mentre i movimenti sono cinque ($x(t) = 0$; $x(t) > 0$ con $v > 0$; $x(t) > 0$ con $v < 0$; $x(t) < 0$ con $v > 0$; $x(t) < 0$ con $v < 0$). La famiglia delle traiettorie, o *ritratto*

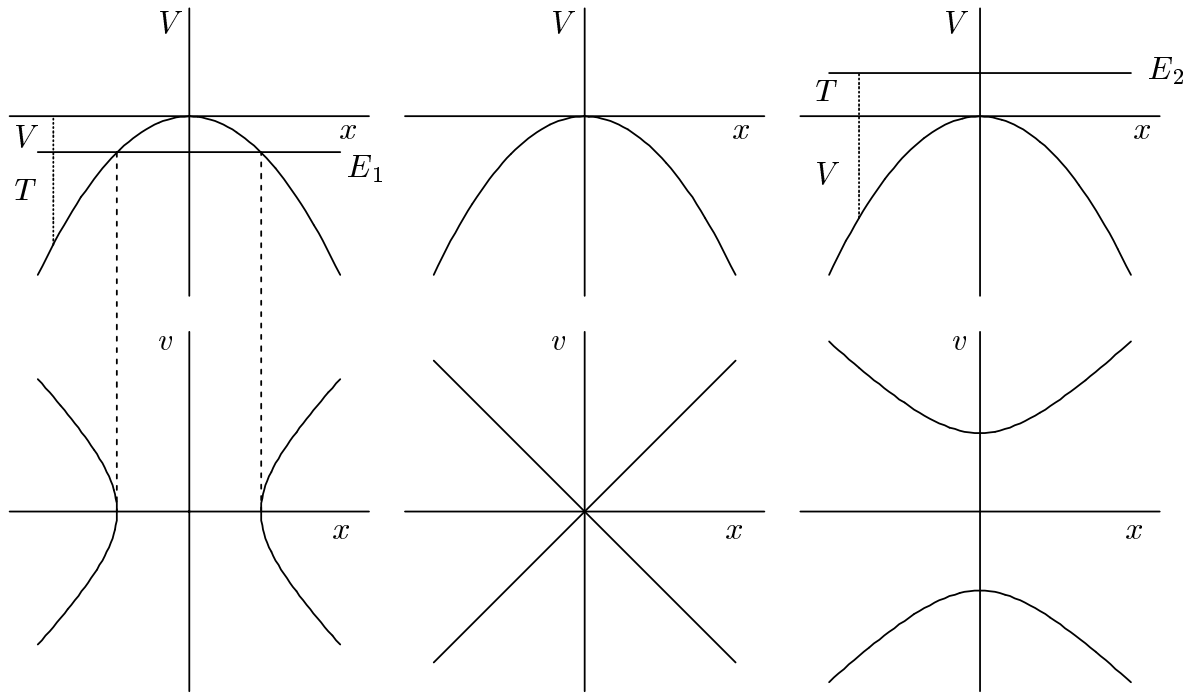


Fig. 1.7. *Grafico del potenziale e ritratto in fase per il repulsore armonico*

in fase, è quella in Fig. 7.

Se ora veniamo a un caso di forza non lineare, i ritratti in fase del centro e del colle rappresentano qualitativamente anche il ritratto in fase del sistema non lineare, ma solo localmente, in corrispondenza rispettivamente dei punti di minimo e di massimo dell'energia potenziale $V(x)$. Infatti, sviluppando in serie di Taylor intorno a un punto $\bar{x}$ di minimo o di massimo e arrestandosi al secondo ordine (il termine del primo ordine è nullo perché $V'(\bar{x}) = 0$), ed eliminando l'inutile termine costante $V(\bar{x})$, si ha $V(x) = \frac{a}{2}(x - \bar{x})^2$ con $a = V''(\bar{x})$, e dunque $a > 0$ per il minimo, $a < 0$ per il massimo; se ne deduce immediatamente che in un intorno di tali punti il comportamento qualitativo corrisponde a quello dell'oscillatore armonico e rispettivamente del repulsore armonico. L'analisi qualitativa completa, ovvero il comportamento globale dell'intera famiglia di curve di livello, si stabilisce sempre facilmente. Ad esempio, nel caso della fig. 8 si ha un minimo di V con il corrispondente centro, e un massimo con la corrispondente sella; non è difficile seguire il comportamento della *separatrice* in corrispondenza del valore $\bar{E}$ del massimo. Si osservi che per E nell'intervallo $(E_0, \bar{E})$, ad esempio E_1, si hanno due intervalli disgiunti sull'asse delle x.

Particolarmente importante è il caso del pendolo, con equazione $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$, $V(x) = -\omega^2 \cos x$, in cui la variabile x può pensarsi definita mod 2π (Fig. 9). I punti di equilibrio si hanno per $\sin x = 0$, ovvero $x = 0$ e $x = \pi$ (equivalente a $x = -\pi$), corrispondenti rispettivamente al punto di equilibrio in basso (stabile) e al punto di equilibrio in alto (pendolo rivoltato: instabile). Si osservi la separatrice che connette

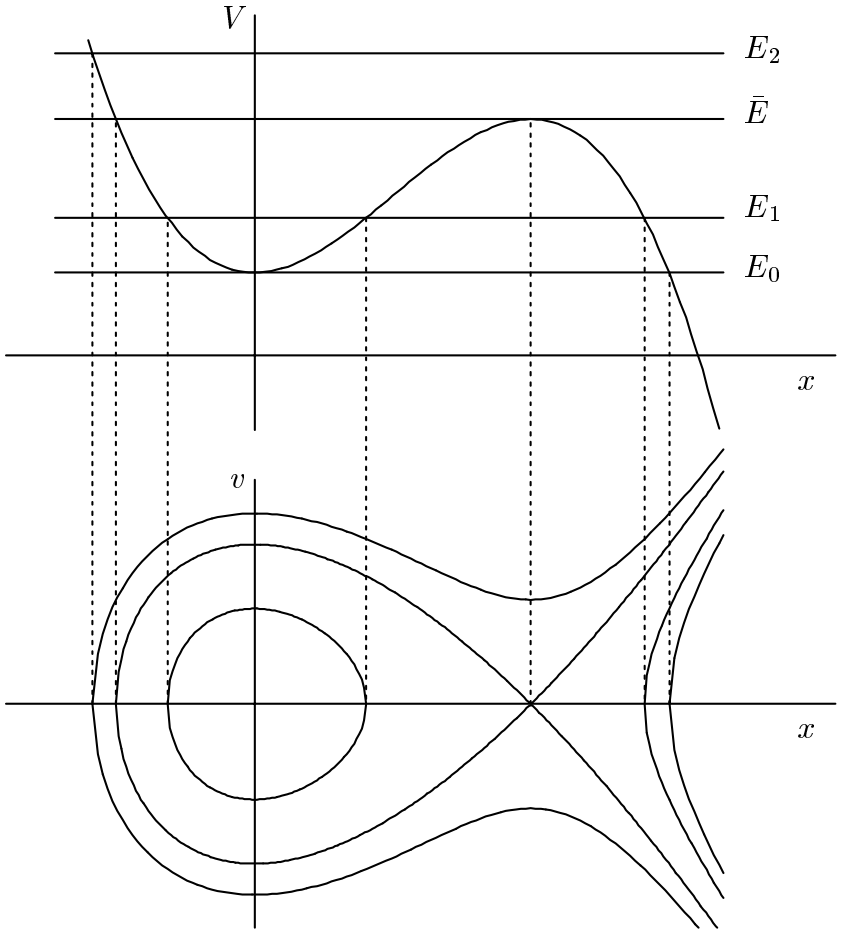


Fig. 1.8. *Grafico del potenziale e ritratto in fase per un caso di forza non lineare*

i due punti sella, relativa al valore $\bar{E}$ per cui V è massimo, cioè $\bar{E} = \omega^2$. Per E nell'intervallo $(-\bar{E}, \bar{E})$ si hanno curve chiuse di tipo lenticolare, e si ha $x \in (-\bar{x}_E, \bar{x}_E)$ dove $\bar{x}_E < \pi$; dunque il pendolo oscilla (librazioni, da *libra*=bilancia). Invece per $E > \bar{E}$ non si hanno oscillazioni, la velocità v non si annulla mai, e il punto compie giri successivi in un verso o nell'altro. Quest'ultimo caso è analogo a quello della particella libera (solo però con velocità non costante).

Un altro esempio particolarmente importante è quello a cui si riduce il problema del moto centrale, tipicamente quello *kepleriano*. In tal caso, come vedremo più avanti, il problema originario tridimensionale si riduce a un problema monodimensionale nella variabile $r > 0$ (distanza dall'origine), con un potenziale efficace $V^*(r)$ della forma $V^*(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$ $(\alpha, \beta > 0)$. Si noti che $V^*(r) \to +\infty$ per $r \to 0$, $V(r) \to 0^-$ per $r \to \infty$. Si ha un solo punto di equilibrio (minimo), e la separatrice (per $E = 0$) è la prima curva per cui la traiettoria è illimitata, come sono poi illimitate le traiettorie per $E > 0$ (ma con velocità limite non nulla). Il ritratto infase è riportato in Fig. 10.

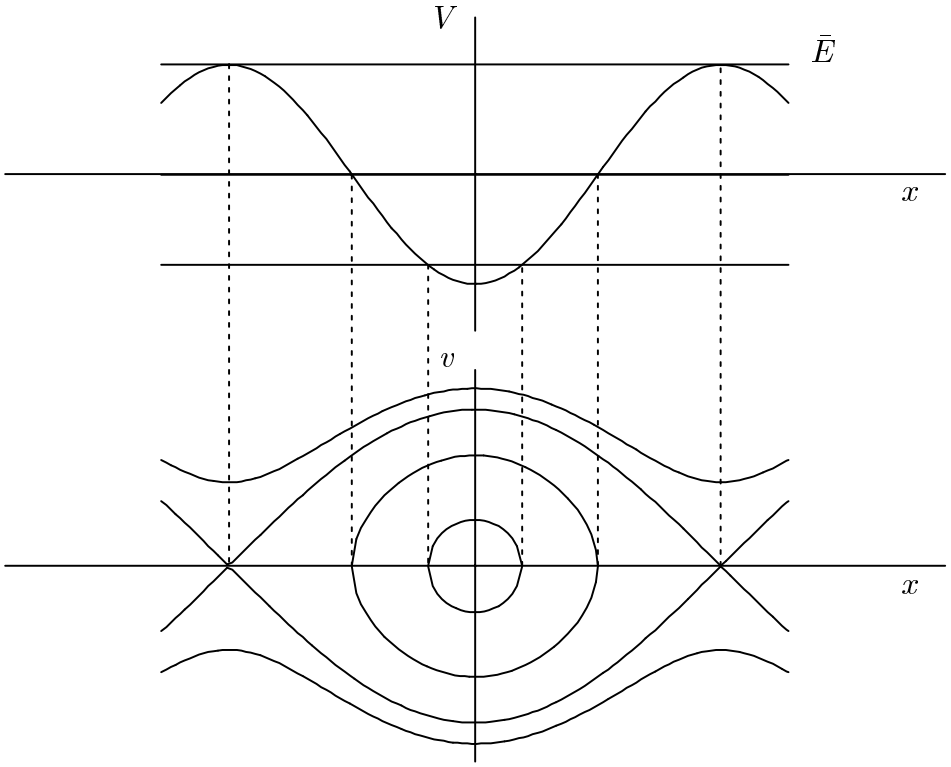


Fig. 1.9. *Grafico del potenziale e ritratto in fase per il pendolo*

- **Osservazione.** In relazione ai punti sella (come nel potenziale della Fig. 8 e in quello del pendolo) è importante sottolineare un fatto: il moto lungo le separatrici non arriva al punto di equilibrio in un tempo finito, ma vi tende per $t \to +\infty$ o $t \to -\infty$. Ciò è conseguenza immediata del teorema di esistenza e unicità: infatti, se ad esempio si giungesse nel punto sella $\bar{x}$ al tempo $\bar{t} < \infty$, si avrebbe che due moti diversi (il moto lungo la separatrice e il moto $x(t) = \bar{x}$ per $t < \bar{t}$) porterebbero al medesimo punto $(\bar{x}, 0)$ nel piano di fase, contro l'unicità. Ciò stabilito, si osserva d'altra parte che per ogni energia E cui corrisponde un'orbita chiusa nel piano di fase (come le librazioni per il pendolo) si ha evidentemente un moto periodico, di periodo T_E dipendente in generale da E: da un lato, per E tendente al minimo dell'energia potenziale V, l'equazione del moto approssima quella di un oscillatore armonico, $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ($\omega^2 > 0$ è la derivata seconda di V, calcolata nel punto di minimo), e corrispondentemente, per continuità,[35] il periodo T_E tende al valore $2\pi/\omega$; dall'altro, ancora per continuità,[36] per $E \to \bar{E}$ si ha $T_E \to \infty$. Un tipico esempio di dipendenza del periodo dall'energia è riportato in Fig. 11.[37] E' del

[35] Va qui usata in modo non del tutto banale la continuità della soluzione al variare dei parametri dell'equazione.

[36] Si usa qui, in modo più semplice, la dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale.

[37] Questo andamento, con tangente orizzontale nell'origine, si ha per il pendolo e per tutti i casi di buca di potenziale simmetrica, grazie al fatto che $\ddot{x} = -\omega^2 x + \mathcal{O}(x^3)$ (la prima correzione

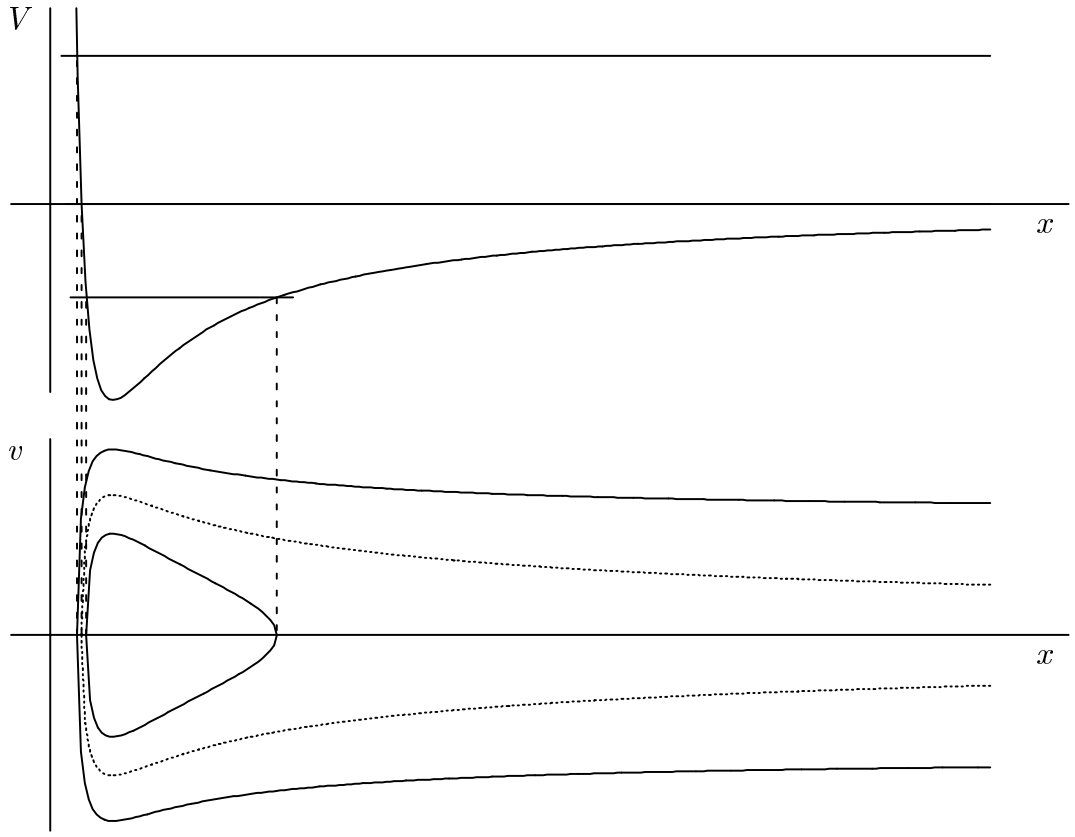


Fig. 1.10. *Grafico del potenziale e ritratto in fase per una forza centrale*

tutto eccezionale il caso (lineare) dell'oscillatore armonico, in cui il periodo non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni. Per la formula analitica del periodo di oscillazione nei sistemi descritti nel presente paragrafo, si veda subito sotto.

- **Osservazione.** Abbiamo considerato in questo paragrafo il caso semplice di equazioni della forma $m\ddot{x} = F(x)$, che è quello tipicamente del moto di un punto materiale su una retta, cui corrisponde l'energia cinetica $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Come si mostrerà più avanti, trattando i sistemi meccanici più generali retti dalle equazioni di Lagrange, per sistemi a un grado di libertà si trova per l'energia cinetica l'espressione più generale $T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}a(x)\dot{x}^2$, con $a(x) > 0$. Ci si rende facilmente conto che le considerazioni qualitative del presente paragrafo si estendono senza sostanziali diversità a tale caso più generale.

$\mathcal{O}(x^2)$ è nulla).

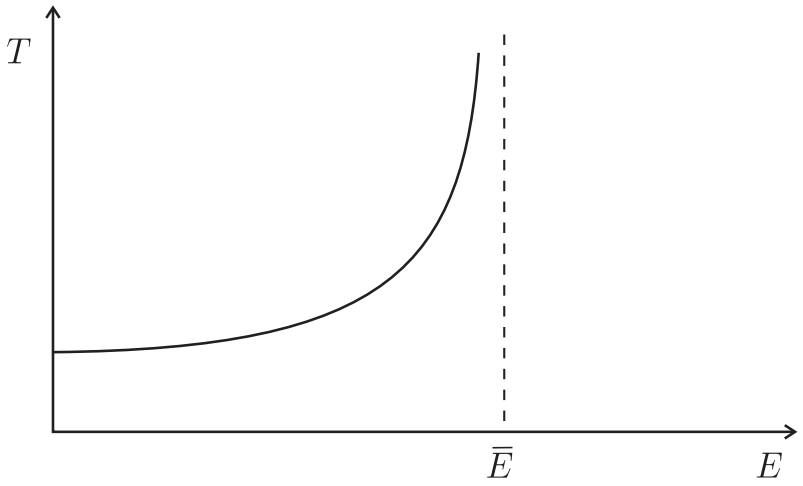


Fig. 1.11. *Tipica dipendenza del periodo di oscillazione dall'energia*

1.2.3 Trattazione analitica

Veniamo infine alla trattazione analitica. Questa è basata ancora sul teorema di conservazione dell'energia $\frac{1}{2}mv^2+V(x)=E$, da cui si ricava $v=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}$. La scelta del segno dipende dal verso di percorrenza, e il segno si altera soltanto all'atto delle inversioni (punti x in cui $V(x)=E$). Facendo una scelta, ad esempio il segno positivo, e ricordando $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, si ha allora l'equazione differenziale *del primo ordine* nell'incognita $x(t)$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}\ , \tag{1.18}$$

o equivalentemente, separando le variabili, $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}}$; per integrazione si trova allora

$$t(x)-t_0=\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}}\ , \tag{1.19}$$

con $x(t_0)=x_0$. Per integrazione e inversione si determina così in linea di principio il movimento $x(t)$; si dice allora che si è ricondotto il problema *alle quadrature* (integrazione). Si noti come dall'unica equazione del secondo ordine $m\ddot{x}=-V'(x)$ si sia ottenuta la famiglia a un parametro di equazioni del primo ordine (1.18), facendo uso della presenza di una costante del moto (energia), essendo il parametro proprio il valore di tale costante del moto.

- **Osservazione.** In un punto x di inversione, in cui $V(x)=E$, l'integrando nella (1.19) diverge; tuttavia, essendo $V'(x_1)\neq 0$, è facile verificare che l'integrale è finito (ciò corrisponde al fatto fisicamente evidente che si giunge al punto di inversione in un tempo finito). Invece per un punto x che sia un massimo, cioè

per un moto lungo una separatrice, si vede facilmente che l'integrale diverge. Si verifica così in modo analitico che è infinito il tempo necessario per raggiungere un punto di equilibrio instabile lungo la separatrice.

- **Osservazione.** Sia $S(E)$ l'area racchiusa entro una curva di fase chiusa (corrispondente ad esempio ad una librazione del pendolo; vedi Fig. 9), e sia T_E il corrispondente periodo. Allora vale

$$T_E = m\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E} \ .$$

Ciò si vede nel modo seguente: siano $x_0 = x_0(E)$, $x_1 = x_1(E)$ i due punti di inversione. Allora per la (1.19) si ha $T_E = 2\int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}}$. D'altra parte, se denotiamo con $v(E,x)$ la funzione che dà la linea di livello nello spazio delle fasi corrispondente al valore E, è evidentemente $S(E) = 2\int_{x_0}^{x_1} v(E,x)\mathrm{d}x = 2\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}\mathrm{d}x$. Basta allora eseguire la derivata rispetto ad E per verificare il risultato.[38)]

1.3 Studio locale attorno ai punti singolari

1.3.1 Il procedimento di linearizzazione

Nel caso dei sistemi meccanici autonomi conservativi, descritti da equazioni del tipo $\ddot{x} = f(x)$, la costruzione dei ritratti in fase descritta sopra si è basata in modo essenziale sulla presenza di punti singolari nel piano di fase e sullo studio qualitativo locale del sistema attorno a tali punti.[39)] Più precisamente, abbiamo osservato che i punti di equilibrio $\mathbf{c} = (x^*, 0)$ si trovano per $f(x^*) = 0$, e dunque, genericamente, in corrispondenza a massimi o minimi dell'energia potenziale V, e abbiamo concluso che localmente, attorno a tali punti singolari, i sistemi approssimano, rispettivamente, un oscillatore armonico o un repulsore armonico. Anzi, da questi elementari sistemi lineari abbiamo preso la terminologia "centro" e "colle" (o sella), e l'abbiamo applicata ai punti singolari in questione compiendo una prima parziale classificazione.

Il procedimento di studio locale attorno a un punto singolare,[40)] nel quale si sostituisce al sistema non lineare (difficile) il sistema lineare (facile) che meglio lo approssima, si dice *linearizzazione.* Noi ora illustreremo il procedimento di linearizzazione

---

[38)] Nell'eseguire la derivazione, si tenga presente che anche gli estremi di integrazione x_0, x_1 dipendono da E; si verifica facilmente che i due termini corrispondenti non contribuiscono a $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E}$.

[39)] Non solo, naturalmente: altrettanto essenziale è stata l'analisi, non locale, del comportamento delle separatrici.

[40)] Il procedimento poi si generalizza allo studio locale attorno a moti periodici, o anche (ma la cosa diventa assai meno elementare) attorno a moti non periodici.

per sistemi qualsiasi in $\mathbb{R}^n$, ed effettueremo poi uno studio dettagliato dei sistemi linearizzati per $n = 2$; tale studio ci condurrà a una classificazione qualitativa completa dei punti singolari in $\mathbb{R}^2$ (nel testo ci limiteremo ai casi generici o in qualche modo tipici, mentre gli altri casi, meno interessanti per noi, saranno trattati in appendice).

Ricordiamo che i *sistemi lineari* (omogenei, a coefficienti costanti) in $\mathbb{R}^n$ sono sistemi di equazioni differenziali della forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \ , \tag{1.20}$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e A matrice costante $n \times n$. A questa forma si giunge naturalmente, a partire da un generico sistema (autonomo) in $\mathbb{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \ , \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ , \qquad \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ , \tag{1.21}$$

il cui campo vettoriale $\mathbf{f}$ possieda un punto singolare $\mathbf{c}$, eseguendo uno sviluppo di Taylor di $\mathbf{f}$ attorno a $\mathbf{c}$. Posto infatti $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \xi$, sicché $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\xi}$, e ricordando $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = 0$, si ottiene subito

$$\dot{\xi} = A\xi + O(\|\xi\|^2) \ , \tag{1.22}$$

con A matrice jacobiana di $\mathbf{f}$ valutata nel punto singoare,

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{c}) \ . \tag{1.23}$$

Il sistema lineare (1.20) si ottiene evidentemente trascurando i termini di secondo ordine nella (1.23), a parte il cambiamento di nome della variabile da ξ a x. La matrice A, in questo contesto generale, è una generica matrice reale $n \times n$; per i sistemi conservativi in $\mathbb{R}^2$ di cui ci siamo occupati in precedenza, ovvero $\dot{x} = v$, $\dot{v} = f(x)$, con $f(x^*) = 0$, A assume sempre la forma particolarissima

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x^*) & 0 \end{pmatrix} \ .$$

L'equazione (1.20) con A data dalla (1.23) si dice anche *equazione alle variazioni* (*variational equation*) per l'equazione (1.21), relativa alla soluzione particolare $\mathbf{x} = 0$.[41)]

Per il sistema lineare (1.20) si verifica immediatamente che vale il principio di sovrapposizione, ovvero ogni combinazione lineare di soluzioni è a sua volta soluzione. La soluzione generale del sistema, dipendente da n costanti arbitrarie, si ottiene allora combinando linearmente n soluzioni particolari indipendenti.[42)] Seguendo un pro-

---

[41)] Più in generale, si può definire una equazione alle variazioni relativamente a una qualsiasi soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ di un'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione, si richiede che $\mathbf{x}(t)+\xi(t)$ sia soluzione al primo ordine in ξ, e si ottiene allora che $\xi(t)$ soddisfa l'equazione lineare non autonoma $\dot{\xi} = A(t)\xi$, dove $A = A(t)$ è la matrice definita da $A_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t))$.

[42)] Dimostrazione: se $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ sono soluzioni indipendenti, precisamente tali che gli n vettori $\mathbf{x}^{(1)}(0), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(0)$ siano linearmente indipendenti, si verifica immediatamente che la soluzione corrispondente all'arbitrario dato iniziale $x(0) = \sum_i C_i \mathbf{x}^{(i)}(0)$ è $\mathbf{x}(0) = \sum_i C_i \mathbf{x}^{(i)}(t)$.

cedimento tipico che ritroveremo anche più avanti[43)] cerchiamo soluzioni particolari *fattorizzate* della forma

$$\mathbf{x}(t) = \tau(t)\mathbf{u} \ , \qquad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \tag{1.24}$$

($\mathbf{u}$ costante). Le eventuali soluzioni (1.24) sono speciali in quanto tutte le componenti $x_1, \ldots, x_n$ di $\mathbf{x}$ evolvono con la medesima legge temporale, e corrispondentemente la soluzione $\mathbf{x}(t)$ si mantiene sempre parallela ad un vettore fissato $\mathbf{u}$. Interessano evidentemente le soluzioni non banali, cioè tali che $\mathbf{x}(t)$ non sia identicamente nulla; ma allora $\mathbf{x}(t)$ non si annulla mai (con evidenza, se $\mathbf{x}(t)$ è nulla in un istante è nulla sempre), e corrispondentemente neanche $\tau(t)$ si annulla mai. Per la linearità dell'operatore A, vale $A\,\tau(t)\mathbf{u} = \tau(t)A\mathbf{u}$, e d'altra parte, per la linearità dell'operatore di derivazione, vale $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tau(t)\mathbf{u}) = \dot\tau(t)\mathbf{u}$; dunque deve essere $\dot\tau(t)\mathbf{u} = \tau(t)A\mathbf{u}$. Ciò è possibile se e solo se i vettori $\mathbf{u}$ e $A\mathbf{u}$ sono paralleli, ovvero se si ha[44)]

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \tag{1.25}$$

con un opportuno numero reale λ, e quindi anche

$$\dot\tau(t) = \lambda\tau(t) \ . \tag{1.26}$$

La (1.25) si dice *equazione agli autovalori* per l'operatore lineare A; $\mathbf{u}$ si dice *autovettore* e λ il corrispondente *autovalore*.[45)] Si suppone qui una minima familiarità con tale equazione.

Per ogni autovalore λ, l'evoluzione temporale del fattore $\tau(t)$ si ottiene subito integrando la (1.26), e si ha $\tau(t) = Ce^{\lambda t}$, con un'arbitraria costante $C = \tau(0)$. Si è così dimostrata la seguente

Proposizione 1.5: *Per l'equazione lineare $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ si hanno soluzioni particolari fattorizzate della forma*

$$\mathbf{x}(t) = Ce^{\lambda t}\mathbf{u} \tag{1.27}$$

in corrispondenza ad ogni autovettore $\mathbf{u}$ di A, essendo λ il corrispondente autovalore.

Il procedimento che abbiamo seguito conduce dunque alla soluzione generale dell'equazione lineare (1.20) nel caso, generico ma non generale, in cui la matrice A ammetta n autovettori linearmente indipendenti, cosa che si ottiene, in particolare, se gli n autovalori, soluzioni come è noto dell'equazione algebrica di grado n

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

[43)] Si veda lo studio dei *modi normali di oscillazione* di un sistema attorno a una configurazione di equilibrio stabile. Per le equazioni alle derivate parziali tale procedimento di fattorizzazione corrisponde al metodo di *separazione delle variabili;* le soluzioni fattorizzate rappresentano, ad esempio, le cosiddette *onde stazionarie* per l'equazione della corda vibrante, e gli *stati stazionari* per l'equazione di Schroedinger. Nel caso della corda vibrante, ad es., si assume per l'elongazione la forma $u(x,t) = \tau(t)X(x)$.

[44)] In altre parole: dividendo per $\tau(t) \neq 0$ si ha $A\mathbf{u} = \frac{\dot\tau(t)}{\tau(t)}\mathbf{u}$, e dunque, poiché il primo membro è indipendente dal tempo, segue necessariamente che il rapporto $\frac{\dot\tau(t)}{\tau(t)}$ è una costante λ. Nell'analogo procedimento di separazione delle variabili, λ è chiamata *costante di separazione*.

[45)] Inglese *eigenvalue*, tedesco *eigenwert*, francese *valeur propre*.

(con I matrice identità $n \times n$) sono distinti.

1.3.2 Classificazione dei punti singolari nel piano

Proseguiamo ora restringendoci al caso $n = 2$, e anzi, ci limitiamo qui nel testo alla situazione generica $0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$, cosicché in particolare $\det A \neq 0$, e inoltre i due autovettori $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}$ sono linearmente indipendenti; gli altri casi (compreso quello in cui A non possiede due autovettori indipendenti) sono rinviati all'appendice B.

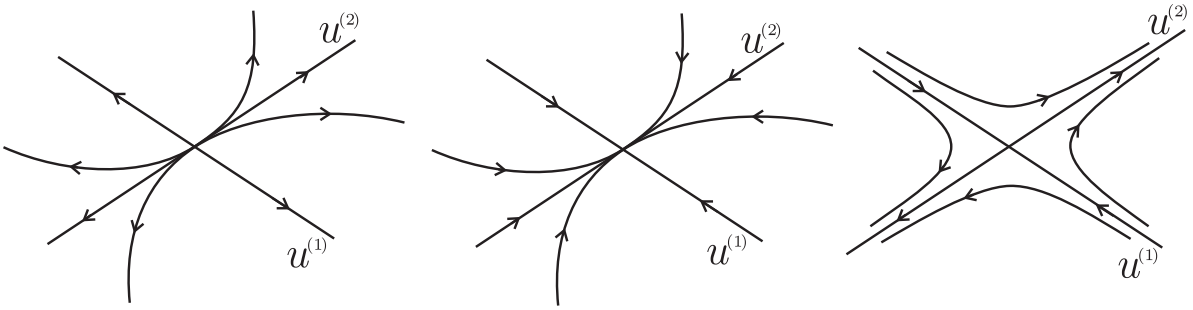
Autovalori e autovettori sono in generale complessi; per la realtà della matrice A si hanno tuttavia per gli autovalori due soli casi possibili:

1) λ_1, λ_2 reali;
2) λ_1, λ_2 complesso–coniugati.

Caso 1 (autovalori λ_1, λ_2 reali). In questo caso anche gli autovettori $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}$ possono essere presi reali,[46] e la soluzione generale (reale) può scriversi nella forma

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}^{(1)} + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}^{(2)} \ , \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{1.28}$$

A seconda dei segni di λ_1, λ_2 si hanno allora i tre sottocasi illustrati nella Fig. 12: nodo stabile (instabile) per $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (< 0), sella per λ_1, λ_2 di segno opposto.



$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ nodo instabile (per $t \to +\infty$)

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ nodo stabile (per $t \to +\infty$)

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ sella (o colle)

Fig. 1.12. *Il caso degli autovalori reali*

- **Esercizio 1.7:** si dimostri che, nel caso dei nodi, la generica traiettoria è tangente nell'origine all'autovettore con autovalore minore in modulo.

Caso 2 (autovalori λ_1, λ_2 complesso–coniugati). Denotiamo $\lambda_1 = \lambda$, $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}$. Allora si ha $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ (complesso coniugato di λ), e coniugando l'equazione $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ segue

[46] Attenzione: non ha senso dire che gli autovettori *sono* reali, perchè se $\mathbf{u}$ è autovettore lo è anche $c\mathbf{u}$, con c complesso qualsiasi. Ma si verifica subito che se $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$, con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ reali, è autovettore corrispondente a λ reale, allora anche $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori corrispondenti al medesimo λ.

(per la realtà di A) $\mathbf{u}^{(2)} = \bar{\mathbf{u}}$ (ovvero $\bar{\mathbf{u}}$ è autovettore di A, e proprio con autovalore $\bar{\lambda}$). In analogia col caso precedente, la soluzione generale complessa può scriversi nella forma

$$\mathbf{x}(t) = Ce^{\lambda t}\mathbf{u} + De^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{u}} \ , \qquad C, D \in \mathbb{C} \ , \tag{1.29}$$

ed essa è reale per $D = \bar{C}$. Si pone allora il problema di scrivere la soluzione reale $\mathbf{x}(t)$ senza far intervenire vettori e coefficienti complessi, come è nella (1.29). A tal fine basta decomporre il vettore $\mathbf{u}$ ed il numero λ in parti reali e immaginarie

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}^{(1)} + i\mathbf{v}^{(2)} \ , \quad \lambda = \alpha + i\beta \ , \qquad \mathbf{v}^{(i)} \in \mathbb{R}^2 \ , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ , \tag{1.30}$$

e scrivere C in forma esponenziale,

$$C = \rho e^{i\gamma} \ . \tag{1.31}$$

Si ottiene allora $\mathbf{x}(t) = \rho e^{\alpha t}[e^{i(\beta t+\gamma)}(\mathbf{v}^{(1)} + i\mathbf{v}^{(2)}) + e^{-i(\beta t+\gamma)}(\mathbf{v}^{(1)} - i\mathbf{v}^{(2)})]$ ovvero, con le formule di Eulero,

$$\mathbf{x}(t) = \eta_1(t)\mathbf{v}^{(1)} + \eta_2(t)\mathbf{v}^{(2)} \tag{1.32}$$

dove

$$\eta_1(t) = 2\rho e^{\alpha t}\cos(\beta t + \gamma) \ , \quad \eta_2(t) = -2\rho e^{\alpha t}\sin(\beta t + \gamma) \tag{1.33}$$

Dunque si ha ancora, per la soluzione generale, una decomposizione (1.32) analoga a quella (1.28) del caso degli autovalori reali. Ora però la decomposizione è sulla base reale $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}$, parti reale e immaginaria dell'autovettore complesso $\mathbf{u}$, che si mostrano facilmente essere linearmente indipendenti;[47] si osservi che si hanno esponenziali reali coinvolgenti la parte reale dell'autovalore λ, e funzioni oscillanti (seni e coseni) coinvolgenti la parte immaginaria di λ. Le costanti ρ, γ sono le costanti arbitrarie della soluzione generale. Si hanno pertanto ancora tre sottocasi come illustrato nella Fig. 13, in dipendenza questa volta dal segno della parte reale di λ: fuoco stabile (instabile) per $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ (> 0), centro per $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$.

E' molto facile distinguere tra tutti i sei casi sopra descritti, anche senza calcolare esplicitamente gli autovalori della matrice A, semplicemente considerandone la traccia e il determinante.[48] Infatti, come si verifica immediatamente, l'equazione per λ è

$$\lambda^2 - (\mathrm{Tr}\,A)\lambda + \det A = 0 \ ;$$

allora, dalla formula risolutiva

$$2\lambda = \mathrm{Tr}\,A \pm \sqrt{\Delta} \ , \qquad \Delta = (\mathrm{Tr}\,A)^2 - 4\det A$$

si vede subito che si hanno i seguenti casi possibili:

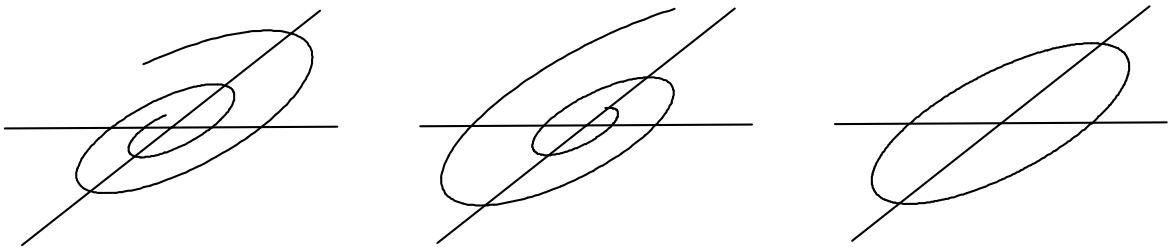
i) autovalori reali di segno opposto, e dunque un punto di sella, se $\det A < 0$;

ii) autovalori reali concordi (dello stesso segno di $\mathrm{Tr}\,A$), e dunque un nodo stabile o un nodo instabile, se $\det A > 0$ e $\Delta > 0$;

---

[47] Infatti, sia per assurdo $\mathbf{v}^{(2)} = \mu\mathbf{v}^{(1)}$, μ reale non nullo; allora si avrebbe $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{v}^{(1)} + i\mathbf{v}^{(2)} = (1+i\mu)\mathbf{v}^{(1)}$ e analogamente $\mathbf{u}^{(2)} = (1-i\mu)\mathbf{v}^{(1)}$, sicché sarebbe $\mathbf{u}^{(2)} = \frac{1-i\mu}{1+i\mu}\mathbf{u}^{(1)}$, contro l'indipendenza lineare degli autovettori complessi $\mathbf{u}^{(i)}$.

[48] Come è ben noto, le quantità $\mathrm{Tr}\,A$ e $\det A$ sono invarianti per trasformazioni lineari.



$\alpha \equiv \mathrm{Re}\,\lambda < 0$
fuoco stabile
(per $t \to +\infty$)

$\alpha \equiv \mathrm{Re}\,\lambda > 0$
fuoco instabile
(per $t \to +\infty$)

$\alpha \equiv \mathrm{Re}\,\lambda = 0$
centro

Fig. 1.13. *Il caso degli autovalori complesso–coniugati*

iii) autovalori complesso–coniugati (con parte reale dello stesso segno di $\mathrm{Tr}\,A$), e dunque un fuoco stabile o un fuoco instabile (o un centro se $\mathrm{Tr}\,A = 0$), se $\Delta < 0$.

Pertanto è significativo fare riferimento al piano con coordinate $(\mathrm{Tr}\,A, \det A)$, (Fig. 14). Tale piano risulta naturalmente diviso in regioni aperte dalle curve seguenti: $\det A = 0$ (asse orizzontale); $\mathrm{Tr}\,A = 0$ con $\det A > 0$ (semiasse verticale positivo); $\Delta = 0$ (parabola riportata in figura), e ad ognuna di tali regioni aperte corrisponde un comportamento qualitativo ben preciso.

I casi "*non generici*", che abbiamo qui lasciato da parte, corrispondono alle due curve $\det A = 0$ (in cui un autovalore è nullo) e $\Delta = 0$ (in cui i due autovalori coincidono). L'origine, punto di incontro di tali due curve, può dirsi in qualche modo doppiamente non generico.

Un caso particolarmente importante è quello meccanico (non necesariamente conservativo) retto dall'equazione $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ ovvero $\dot{x} = y$, $\dot{y} = f(x, y)$, con $f(0,0) = 0$. La matrice A ha allora la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \ , \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ ,$$

corrispondente all'equazione linearizzata $\ddot{x} - \beta\dot{x} - \alpha x = 0$, e si ha semplicemente

$$\mathrm{Tr}\,A = \beta \ , \qquad \det A = -\alpha \ .$$

In particolare nel caso conservativo, con f indipendente da $\dot{x}$ e dunque $\beta = 0$, si ha un colle per $\alpha = f'(0) > 0$ (massimo dell'energia potenziale, repulsore armonico) e un centro per $\alpha < 0$ (minimo dell'energia potenziale, oscillatore armonico). Si osservi come i sistemi conservativi, essendo rappresentati nel piano $(\mathrm{Tr}\,A, \det A)$ da una linea (cioè $\mathrm{Tr}\,A = 0$), siano da considerarsi eccezionali tra i sistemi lineari in due variabili.[49)]

[49)] Ma, mentre nella meccanica i sistemi conservativi, per quanto eccezionali, hanno in linea di principio un ruolo di particolare importanza (perché si assume per ipotesi che i modelli microscopici siano conservativi, e ci si ripromette poi di "dedurre" gli aspetti dissipativi a partire dalle equazioni microscopiche conservative, al limite di sistemi con infiniti gradi di libertà), ciò non

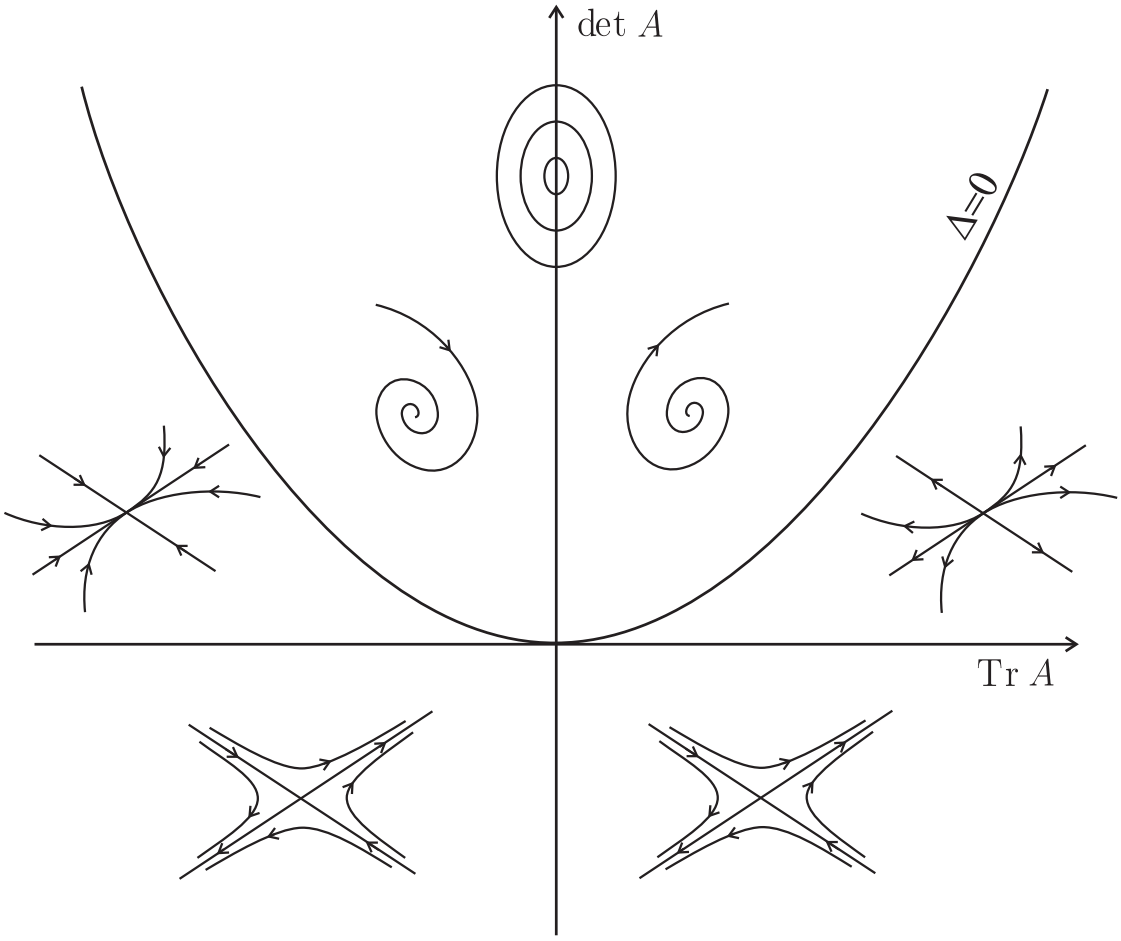


Fig. 1.14. *Diagramma di biforcazione per i punti singolari nel piano*

- **Esercizio 1.8:** verificare che:
  a) per l'oscillatore armonico smorzato ($\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$) si ha un fuoco stabile nel caso di debole smorzamento ($\mu < \omega$), e un nodo stabile nel caso di grande smorzamento ($\mu > \omega$);
  b) per il sistema di Lotka–Volterra l'origine è un colle, mentre il punto di equilibrio non banale è un centro;
  c) per l'equazione di Van der Pol l'origine è un nodo instabile per $\beta > 2$, e un fuoco instabile per $\beta < 2$;
  d) per sistemi di tipo meccanico, cioè descritti da $\dot{x} = v$, $\dot{v} = f(x, v)$, nel caso dei nodi si ha che le direzioni principali (gli autovettori della matrice A) non sono disposti arbitrariamente nel piano delle fasi: nel caso stabile (per $t \to +\infty$) essi giacciono nel

---

avviene ad esempio nell'ambito dei modelli matematici in biologia o in economia. Per questo motivo è alquanto spontaneo pensare di generalizzare il sistema di Lotka–Volterra a un sistema le cui proprietà qualitative siano stabili rispetto a piccole variazioni dei parametri (stabilità strutturale). Tale generalizzazione fu compiuta da Kolmogorov in un bellissimo articolo scritto originariamente in italiano: A.Kolmogorov, *Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza*, Giornale Italiano degli Attuari II, 2, 74-80 (1934).

secondo e nel quarto quadrante, mentre nel caso instabile essi giacciono nel primo e nel terzo quadrante.

- **Osservazione.** Se ci limitiamo a considerare le sole proprietà di stabilità dell'origine per l'equazione lineare $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, è evidente che esse dipendono solo dal segno della parte reale degli autovalori (che è il segno degli autovalori stessi, nel caso reale). Precisamente si ha:

  i) stabilità asintotica per tempi positivi, se entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa (*pozzo*);

  ii) stabilità asintotica per tempi negativi, se entrambi gli autovalori hanno parte reale positiva (*sorgente*);

  iii) instabilità per tempi positivi (negativi), se uno almeno degli autovalori ha parte reale positiva (negativa).

  Si potrebbe dimostrare che queste proprietà di stabilità si mantengono anche nel caso, sopra non considerato, di autovalori coincidenti. Nel caso invece di $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, se $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ si ha il centro, che è stabile per tutti i tempi; invece, se gli autovalori sono entrambi nulli si ha instabilità (come per la particella libera), salvo il caso banale $A = 0$. Come si vedrà sotto per l'analogo problema in $\mathbb{R}^n$, nei tre casi sopra messi in evidenza le proprietà di stabilità permangono poi anche per l'originario sistema nonlineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, di cui $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ rappresenta l'equazione alle variazioni. Viceversa, come è illustrato dall'esercizio seguente, se $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, allora il comportamento qualitativo dell'equazione nonlineare non è a priori determinato.

- **Esercizio 1.9:** Si studi l'equazione $\ddot{x} + 2\mu x^2 \dot{x} + \omega^2 x = 0$. Utilizzando il teorema di Ljapunov (con la condizione b") si dimostri che l'origine, pur essendo un centro, è asintoticamente stabile per tempi positivi se $\mu > 0$, asintoticamente stabile per tempi negativi (e dunque instabile nel futuro) per $\mu < 0$.

- **Osservazione** *(il problema delle biforcazioni).* In molti casi avviene che si debba considerare una equazione differenziale dipendente da parametri, nel caso più semplice da un parametro reale, diciamo μ. Così, se il sistema presenta un punto di equilibrio, la matrice A, che descrive la linearizzazione del sistema attorno a quel punto, dipenderà in generale da μ, e dunque ne dipenderà anche la natura del punto singolare stesso (centro, colle, ...). E' quindi significativo considerare la curva γ descritta dal corrispondente punto rappresentativo nel piano $\mathrm{Tr}\,A, \det A$. Quando essa attraversa una delle curve $\det A = 0$, $\mathrm{Tr}\,A = 0$ con $\det A > 0$, $(\mathrm{Tr}\,A)^2 - 4\det A = 0$, cambierà la natura del punto singolare, e quindi anche il comportamento qualitativo del sistema. Tale fenomeno è detto *biforcazione*. Le regioni in cui la natura qualitativa del sistema non varia, che sono degli aperti di dimensione due, si dicono *aperti di stabilità*,[50] mentre le curve di

[50] Si tratta qui di una stabilità in senso alquanto diverso di quello della stabilità di un punto di equilibrio: in questo caso infatti si considera la stabilità del comportamento qualitativo del sistema, al variare di un parametro. Tale proprietà, qui enunciata in maniera euristica,

codimensione uno attraverso le quali si hanno le biforcazioni si dicono *chiusi di biforcazione*. Alcuni esempi significativi di biforcazioni in sistemi meccanici sono riportati nell'Appendice C.

1.3.3 Cenno al problema in $\mathbb{R}^n$ e al problema nonlineare

La classificazione dettagliata dei punti singolari, che come si è visto è abbastanza semplice in $\mathbb{R}^2$, diviene quantomeno complicata al crescere della dimensione dello spazio delle fasi, con l'eccezione del caso semplice (ancora una volta generico) in cui la matrice A ammette autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distinti e tutti non nulli. Gli autovalori, anche in $\mathbb{R}^n$, o sono reali, o sono in coppie complesso coniugate. Per ogni autovalore rale si ha una soluzione reale esponenziale, stabile o instabile a seconda del segno di λ, su di un autospazio reale di dimensione uno (una retta reale); per ogni coppia complesso coniugata si ha invece un autospazio reale bidimensionale, con un comportamento di tipo fuoco stabile o instabile, o centro, a seconda della parte reale della coppia di autovalori. Il comportamento del sistema completo è la semplice sovrapposizione di questi comportamenti elementari. La trattazione dei casi non generici diviene invece molto complicata, e non vi entreremo.

Per quanto riguarda le proprietà di stabilità, del tutto in generale (cioè anche in presenza di autovalori nulli o multipli), vale la seguente

Proposizione 1.6: *Si consideri l'equazione lineare $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^n$. Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa (positiva), allora l'origine è asintoticamente stabile per tempi positivi (negativi). Se uno almeno degli autovalori ha parte reale positiva (negativa), allora l'origine è instabile per tempi positivi (negativi).*

La dimostrazione è immediata solo nel caso di autovalori distinti e non nulli (si scrive esplicitamente la soluzione generale, come combinazione lineare di quelle particolari indicate sopra). Per il caso generale, si veda un trattato sulle equazioni differenziali ordinarie o sulla teoria dei sistemi, ad esempio il già citato libro di Hirsch e Smale.

Resta infine il problema, alquanto più delicato, di stabilire il comportamento qualitativo dei sistemi nonlineari prossimi a quelli lineari qui considerati, in prossimità dei punti singolari, o, come si dice, localmente. Come si è già osservato sopra (si veda l'esercizio 1.9), la corrispondenza tra il comportamento dell'equazione nonlineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e quello della relativa equazione alle variazioni $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ non è sempre garantita. Tuttavia si può dimostrare che, nei casi considerati nella proposizione 1.6, le proprietà di stabilità del problema nonlineare coincidono con quelle del corrispondente problema lineare. Precisamente si ha la

Proposizione 1.7: *Si considerino l'equazione nonlineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\mathbb{R}^n$, e la corrispondente equazione linearizzata $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ relativa a un punto singolare $\mathbf{c}$. Allora, se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa (positiva), $\mathbf{c}$ è asintoticamente stabile per tempi*

---

fu formalizzata da Andronov e chiamata *stabilità strutturale*. Si veda A.Andronov, A.Vitt e S.Khaikin, *Theory of oscillators*, Pergamon Press (1960).

positivi (negativi); se uno almeno degli autovalori ha parte reale positiva (negativa), **c** *è instabile per tempi positivi (negativi).*

Per la dimostrazione si vedano ad esempio i testi sopra indicati. Il caso che resta scoperto dalla proposizione è quello in cui nessun autovalore ha parte reale positiva (negativa), e uno almeno ha parte reale nulla. In tal caso la stabilità non è nota a priori, e può essere diversa nel caso lineare e non lineare.

Anche in $\mathbb{R}^n$ si usa la terminologia di *pozzi* e *sorgenti*, per indicare i punti singolari in cui gli autovalori hanno tutti parte reale negativa o rispettivamente positiva. E' poi particolarmente significativa la classe dei punti singolari con autovalori tutti a parte reale non nulla, detti *punti iperbolici*: tale classe comprende dunque i pozzi e le sorgenti, ma ad esempio anche i punti di sella. Per i punti iperbolici si ha l'importante *teorema di Grobman–Hartman*, secondo il quale le orbite del sistema nonlineare e quelle del sistema linearizzato sono inviate localmente le une nelle altre da un omeomorfismo (stabilità strutturale locale dei punti iperbolici).

1.4 Le oscillazioni forzate

Come già si è accennato nel paragrafo introduttivo, capita spesso di aver a che fare con sistemi *non autonomi,* cioè con forze che dipendono esplicitamente dal tempo. Un esempio tipico è quello di un sistema oscillante soggetto a una forza che abbia carattere periodico; il modello più semplice è allora quello di un oscillatore armonico che obbedisce all'equazione

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)\,, \tag{1.34}$$

ove F è una funzione regolare periodica, di periodo T: $F(t+T) = F(t)$; la corrispondente pulsazione Ω è allora definita da $T = 2\pi/\Omega$. L'equazione (1.34), assieme a quella che si ottiene includendo un eventuale attrito viscoso,

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = F(t)\,, \tag{1.35}$$

interviene in molte situazioni fisiche, in pratica ovunque vi siano sistemi vibranti, meccanici o elettrici. In questi due casi le corrispondenti equazioni omogenee associate sono lineari a coefficienti costanti: l'integrale generale si ottiene perciò come somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata, che già conosciamo, e di una soluzione particolare, che dobbiamo trovare.

1.4.1 Oscillatore armonico con forzante sinusoidale

Cominciamo con lo studio del caso semplice di attrito nullo e F sinusoidale, precisamente

$$\ddot{x} + \omega^2 x = C\cos\Omega t\ , \quad \Omega \geq 0\ , \tag{1.36}$$

ove C è una costante, e consideriamo innanzitutto il caso generico

$$\Omega^2 \neq \omega^2\ .$$

In tal caso si trova facilmente una soluzione particolare con la stessa pulsazione del termine forzante, $x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$; infatti, si verifica subito che questa è una soluzione se $\varphi = 0$ e $(\omega^2 - \Omega^2)A = C$. L'integrale generale della (1.36) è allora

$$x(t) = \frac{C}{\omega^2 - \Omega^2}\cos\Omega t + a\cos\omega t + b\sin\omega t\,, \tag{1.37}$$

con a e b costanti arbitrarie determinate dalle condizioni iniziali.[51)] Il moto risulta così sovrapposizione di due oscillazioni di frequenza ω e Ω (Fig. 15).

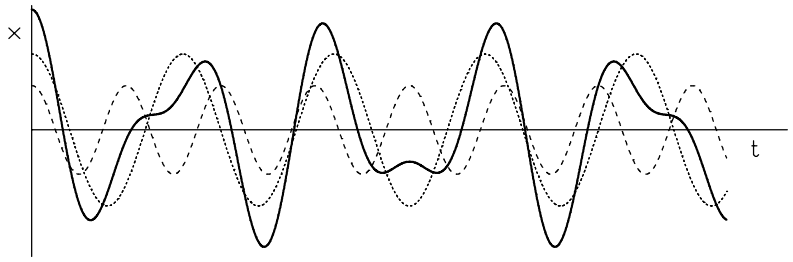


Fig. 1.15. *Le oscillazioni forzate*

Se introduciamo esplicitamente i dati iniziali x_0, v_0 nella soluzione (1.37), è immediato verificare che risulta $a = x_0 - C/(\omega^2 - \Omega^2)$, $b = v_0/\omega$, e dunque si ottiene per la soluzione l'espressione

$$x(t) = \frac{C}{\omega^2 - \Omega^2}(\cos\Omega t - \cos\omega t) + x_l(t)\ , \tag{1.38}$$

avendo indicato con

$$x_l(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

il moto libero, che vi sarebbe con le medesime condizioni iniziali in assenza di forzante. Questa espressione è interessante perché mostra la soluzione come sovrapposizione del moto libero e di un termine aggiuntivo, indipendente dai dati iniziali dell'oscillatore e proporzionale all'ampiezza C del termine forzante; questo termine rappresenta dunque le *oscillazioni forzate,* dovute alla forza oscillante $F(t) = C\cos\Omega t$.

La (1.38) può anche essere utilizzata per studiare il caso $\Omega = \omega$ (caso *risonante*, con risonanza 1–1). Ad ogni t fissato, infatti, la (1.38) ammette limite per $\Omega \to \omega$, precisamente (regola dell'Hospîtal)

$$x(t) = \frac{C}{2\omega}t\sin\omega t + x_l(t)\ . \tag{1.39}$$

Inoltre tale limite è soluzione dell'equazione (1.36) per $\Omega = \omega$. La verifica diretta è immediata; tuttavia ciò è garantito a priori dal teorema di esistenza e unicità, nella

---

[51)] In particolare, per $\Omega = 0$ si ha l'equazione $\ddot{x} + \omega^2 x = C$, con soluzione $x(t) = \frac{C}{\omega^2} + a\cos\omega t + b\sin\omega t$, in cui la soluzione particolare è quella di equilibrio $x = \frac{C}{\omega^2}$.

parte relativa alla continuità della soluzione rispetto alla variazione dei parametri, in questo caso Ω. Si noti che la continuità per $\Omega \to \omega$ non traspare invece dalla (1.37), ove son tenuti fissi non i dati iniziali, ma le costanti a e b.

L'espressione (1.39) mostra che, per $\Omega = \omega$, l'ampiezza delle oscillazioni cresce indefinitamente, cosicché il comportamento asintotico per $t \to \infty$ è qualitativamente diverso dal caso $\Omega \neq \omega$ (e ciò non è in contrasto con il teorema di esistenza e unicità, perché questo garantisce la continuità rispetto ai parametri per ogni tempo *fissato*). E' questo l'esempio più semplice di un fenomeno importante, chiamato *risonanza*; con questo nome ci si riferisce, in generale, alla presenza di rapporti razionali tra le frequenze che intervengono in un sistema (qui $\Omega/\omega = 1$), e agli effetti spesso "drammatici" che ne conseguono. L'effetto della risonanza è, in questo caso, la presenza nella soluzione di un termine non periodico o *secolare,* importante soprattutto per tempi lunghi (da ciò il nome). La ricerca di eventuali termini secolari, associati alle risonanze, è uno dei temi dominanti della meccanica celeste a cavallo tra '700 e '800.

E' interessante analizzare la soluzione (1.38) in prossimità della risonanza, ovvero quando $\Omega \simeq \omega$, $\Omega \neq \omega$. Limitiamoci a considerare il caso con dati iniziali $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$; dall'identità trigonometrica $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, si vede che tale soluzione si può allora scrivere nella forma

$$x(t) = -\frac{2C}{\omega^2 - \Omega^2}\,\sin\frac{\Omega+\omega}{2}t\,\sin\frac{\Omega-\omega}{2}t\,.$$

E' allora utile introdurre le pulsazioni $\tilde\omega$ ed ε definite da $\tilde\omega = \frac{\Omega+\omega}{2}$, $\varepsilon = \frac{\Omega-\omega}{2}$. Infatti, se $|\Omega-\omega| \ll \Omega+\omega$ si ha allora $\tilde\omega \simeq \omega$, $|\varepsilon| \ll \tilde\omega$, cioè si hanno due pulsazioni caratteristiche di cui una è "grande" (è la frequenza tipica del sistema) e l'altra è "piccola" (*disaccordo* o *detuning*). E' dunque significativo riscrivere la soluzione nella forma

$$x(t) = \mathcal{A}(t)\sin\tilde\omega t\ , \qquad \mathcal{A}(t) = \frac{C}{2\tilde\omega}\,\frac{1}{\varepsilon}\sin\varepsilon t\ ,$$

in cui la soluzione appare come un'*oscillazione modulata*, cioè il prodotto di un'oscillazione relativamente rapida (*portante*) di pulsazione $\tilde\omega$, per una "ampiezza lentamente variabile" $\mathcal{A}(t)$ (*modulante*). È questo il fenomeno dei *battimenti,* tipico della sovrapposizione di oscillazioni di frequenza poco diversa, e comunemente usato per accordare gli strumenti musicali: si percepisce il battimento della modulante, il cui periodo diventa sempre più lungo al decrescere del disaccordo (il battimento "scompare" quando le due frequenze sono "praticamente uguali"). La Fig. 16 illustra il fenomeno dei battimenti, e il passaggio alla risonanza esatta quando, per $\Omega \to \omega$ (cioè $\varepsilon \to 0$), il periodo dell'oscillazione lenta tende all'infinito, mentre l'ampiezza dell'oscillazione modulata cresce linearmente col tempo.

1.4.2 Oscillazioni forzate con attrito viscoso

Abbiamo sopra visto che per un oscillatore armonico non smorzato, forzato con un termine sinusoidale, l'ampiezza delle oscillazioni può essere molto elevata quando le due frequenze sono vicine, e addirittura diverge (per $t \to \infty$) nel caso di risonanza.

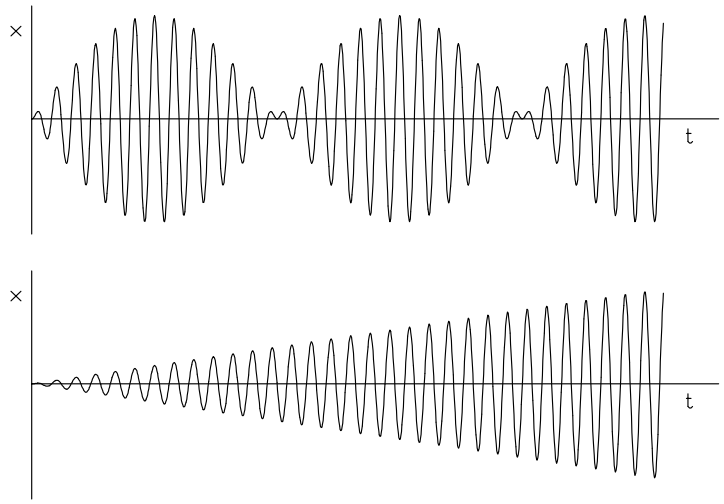


Fig. 1.16. *Battimenti e risonanza*

Tale comportamento singolare scompare, come ora vedremo, in presenza di attrito viscoso.

Consideriamo dunque l'equazione

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x \;=\; C\cos\Omega t \quad \omega, \mu > 0 \;. \tag{1.40}$$

Cerchiamo ancora una soluzione particolare armonica con la stessa frequenza del termine forzante, cioè della forma

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)\,, \tag{1.41}$$

con A e φ costanti da determinare; procedendo per sostituzione, si trova subito l'equazione, da risolvere identicamente in t,

$$(\omega^2 - \Omega^2)A\cos(\Omega t + \varphi) - 2\mu\Omega A\sin(\Omega t + \varphi) = C\cos\Omega t \;,$$

da cui segue (usando le formule di addizione al primo membro, e uguagliando separatamente i coefficienti di $\cos\Omega t$ e $\sin\Omega t$)

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \Omega^2)A\cos\varphi - 2\mu\Omega A\sin\varphi \;&=\; C \\ (\omega^2 - \Omega^2)A\sin\varphi + 2\mu\Omega A\cos\varphi \;&=\; 0 \;. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Queste equazioni sono risolte da

$$A \;=\; \frac{C}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2}} \;, \qquad \tan\varphi \;=\; -\frac{2\mu\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \;, \tag{1.43}$$

con determinazione dell'angolo tra $-\pi$ e 0. Si osservi che la soluzione trovata ha significato anche in caso di risonanza, $\Omega = \omega$; in tal caso è $\varphi = -\pi/2$. Per ricavare la soluzione (1.43) si può naturalmente procedere nella maniera più elementare, cioè

ottenere A quadrando e sommando, e poi ottenere $\tan\varphi$ dalla seconda;[52] chi ha una minima esperienza di geometria, riconosce che si deve determinare una rotazione di un angolo φ che porti a sovrapporre al vettore $(C,0)$ il vettore $((\omega^2-\Omega^2)A, 2\mu\Omega A)$; dall'uguaglianza dei moduli dei due vettori segue allora la prima delle (1.43), dalla seconda delle (1.42) si ottiene $\tan\varphi$, e dalla posizione dei due vettori si riconosce $\varphi \in [-\pi, 0]$. Alla soluzione (1.41) così ottenuta, si deve ovviamente aggiungere l'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla (1.40); questo termine tuttavia non è molto interessante, almeno per tempi lunghi (o, come si suol dire, *a regime*), perché, come si è visto trattando l'oscillatore armonico smorzato, esso tende a zero per $t \to +\infty$.

La (1.43) mostra a colpo che, al variare di ω, l'ampiezza A ha un massimo per $\omega = \Omega$ e che tale massimo vale $C/(2\mu\Omega)$, e dunque è tanto più elevato quanto più piccolo è il coefficiente di attrito. Inoltre, lo sfasamento φ, al variare di ω e Ω, varia con continuità tra 0 e $-\pi$ (lo sfasamento è sempre negativo, ossia le oscillazioni ritardano rispetto alla forza agente). Ancora, la divergenza di A a regime, per $\mu \to 0$ in risonanza, corrisponde al fatto che per $\mu = 0$ in risonanza le oscillazioni forzate hanno ampiezza che cresce indefinitamente col tempo.

- **Esercizio 1.10:** si studi l'andamento dell'ampiezza A per fissato ω al variare di Ω.
- **Esercizio 1.11:** si scriva l'integrale generale della (1.40) per $\Omega = \omega$ e $\mu < \omega$, facendo riferimento esplicito ai dati iniziali x_0 e v_0. Si osservi che per $\mu \to 0$ a t fissato non vi sono divergenze, ma si riottiene la (1.39).
- **Esercizio 1.12:** si determini il moto di un oscillatore armonico, con o senza attrito viscoso, soggetto a una forza dipendente dal tempo della forma seguente: (a) $F(t) = Ce^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$; (b) $F(t) = Ce^{-\lambda t}\cos\Omega t$; (c) $F(t) = Ct$, con le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Applicazione: l'oscillatore forzato come "filtro".

E' innanzitutto evidente che se conosciamo n soluzioni particolari $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ della (1.34) o della (1.35), corrispondenti alle forzanti $F_1(t), \ldots F_n(t)$, allora $x(t) = x_1(t) + \cdots + x_n(t)$ è soluzione della medesima equazione, corrispondente alla forzante $F(t) = F_1(t) + \cdots + F_n(t)$. Consideriamo allora in particolare l'equazione (1.35), supponendo che $F(t)$ sia somma di n termini sinusoidali $F_k(t) = C_k\cos(\Omega_k t + \psi_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Con banale generalizzazione di quanto visto a proposito della (1.40), si vede che una soluzione particolare (anzi, la soluzione di regime) corrispondente al singolo termine F_k è $x_k(t) = A_k\cos(\Omega_k t + \varphi_k)$, ove

$$A_k = \frac{C_k}{\sqrt{(\omega^2-\Omega_k^2)^2 + 4\mu^2\Omega_k^2}}, \qquad \varphi_k = \psi_k - \arctan\frac{2\mu\Omega_k}{(\omega^2-\Omega_k^2)}$$

(la generalizzazione sta solo nella presenza della fase $\psi_k \neq 0$). La soluzione di regime

[52] La determinazione dell'angolo si ottiene, ad esempio, ricavando $\cos\varphi$ dalla seconda, e sostituendo nella prima.

della (1.35) corrispondente a $F(t) = F_1(t) + \cdots F_n(t)$ è allora sovrapposizione di n moti armonici, precisamente

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k)\,.$$

Nel caso μ sia molto piccolo (rispetto a tutte le frequenze in gioco), l'ampiezza di ciascuno di questi moti dipende sensibilmente, oltre che dall'ampiezza C_k del corrispondente termine forzante, anche dalla frequenza propria ω dell'oscillatore: in particolare, per $\omega = \Omega_l$ (e ampiezze C_k non eccessivamente diverse tra loro), risulta $A_l \gg A_k$, $k \neq l$, cosicché $x(t)$ segue praticamente la sola forzante F_l. In questa particolare situazione di risonanza, l'oscillatore si comporta come un filtro, che risponde selettivamente (tanto più selettivamente, quanto più piccolo è μ) alle sollecitazioni esterne, può selezionarne una, e ad esempio seguirne il lento variare dell'ampiezza nel tempo. Sostanzialmente su questo principio si basano i circuiti di sintonia dei comuni apparecchi radio (alla manopola della sintonia corrisponde la variazione di ω; il lento variare dell'ampiezza della forzante è il segnale che si vuol ricevere.)

1.4.3 Il caso di una generica forzante periodica

Consideriamo ora l'equazione (1.34), $\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)$, nel caso in cui F sia una generica funzione periodica, di periodo $T = 2\pi/\Omega$. Come è noto, sotto modeste condizioni di regolarità (per le quali si rinvia ai testi di analisi) F può essere sviluppata in *serie di Fourier:*

$$F(t) \;=\; C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\Omega t + \psi_k)\,, \tag{1.44}$$

e la serie converge uniformemente nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Consideriamo dapprima il caso di non risonanza, cioè in cui sia $\omega \neq k\Omega$, $k = 1, 2, 3 \cdots$. Procedendo come si è fatto nel paragrafo precedente, e ricordando che la convergenza uniforme garantisce la derivabilità termine a termine della serie, otteniamo per l'equazione (1.34) la soluzione particolare

$$x(t) \;=\; \frac{C_0}{\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\omega^2 - k^2\Omega^2} \cos(k\Omega t + \psi_k)\,,$$

per la quale la convergenza uniforme è ancora garantita. Aggiungendo a questa l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, troviamo l'integrale generale della (1.35); introducendo esplicitamente le condizioni iniziali, questo si scrive, come è facile verificare,

$$\begin{aligned} x(t) \;=\; & x_l(t) + \frac{C_0}{\omega^2}(1 - \cos\omega t) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\omega^2 - k^2\Omega^2} \Big[\cos(k\Omega t + \psi_k) - \cos(\omega t + \psi_k) + \Big(\frac{k\Omega}{\omega} - 1\Big) \sin\omega t \sin\psi_k \Big]\,. \end{aligned}$$

Se invece, per un particolare valore di k, vale la relazione di risonanza $k\Omega = \omega$, allora compare il termine secolare

$$\frac{C_k}{2\omega}\, t\, \sin(\omega t + \psi_k)\ ,$$

che per tempi lunghi diventa dominante, anche se la costante C_k è piccola; si comprende così il ruolo delicato delle risonanze nel determinare la soluzione del sistema.

Esattamente allo stesso modo possiamo trattare il caso di attrito viscoso, cioè l'equazione (1.35) $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = F(t)$ con $F(t)$ periodica di periodo $T = 2\pi/\Omega$. In corrispondenza di ogni termine della serie di F abbiamo una soluzione particolare $x_k(t) = A_k \cos(k\Omega t + \varphi_k)$, con

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{C_k}{\sqrt{(\omega^2 - k^2\Omega^2)^2 + 4k^2\mu^2\Omega^2}} \\ \varphi_k &= \psi_k - \arctan\frac{2\mu k\Omega}{\omega^2 - k^2\Omega^2}\,; \end{aligned}$$

sommando queste soluzioni troviamo la soluzione di regime della (1.35):

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega t + \varphi_k)\,.$$

Se per un valore di k risulta $\omega = k\Omega$, il termine corrispondente ha ampiezza $A_k = C_k/(2\mu\omega)$, ed esso è grande, per piccolo attrito, se C_k non è troppo piccolo.

A questo proposito è importante ricordare una proprietà notevole dei coefficienti di Fourier C_k di una funzione periodica $F(t)$: precisamente, quanto più regolare è F, tanto più rapidamente decrescono, con k, i suoi coefficienti di Fourier C_k: in particolare, se F è analitica, allora si ha $|C_k| \le De^{-\lambda k}$, con opportune costanti $D, \lambda > 0$. In pratica, in presenza di attrito viscoso, solo le risonanze con k basso giocano un ruolo rilevante. Invece, in totale assenza di attrito, tutte le risonanze sono importanti, anche se la risonanza relativa a un certo indice k diventa rilevante solo a tempi che crescono con k; infatti essa diviene rilevante quando si ha $|C_k|t > 1$, ovvero $t > D^{-1}e^{\lambda k}$, che è un tempo lunghissimo per k elevato.

1.4.4 Cenno al caso di forzante non periodica

Ci limitiamo a considerare la sola equazione (1.34), senza però supporre che $F(t)$ sia periodica in t. Il proposito è quello di scrivere la soluzione in forma analoga alla (1.38), cioè come somma dell'oscillazione libera che si avrebbe in assenza di forzante, e di un contributo (che risulterà anche qui indipendente dai dati iniziali) dovuto al termine forzante. A tale scopo sostituiamo all'equazione del secondo ordine (1.34) una coppia di equazioni del primo ordine, per le variabili complesse $z(t) = \dot{x}(t) + i\omega x(t)$ e $w(t) = \dot{x}(t) - i\omega x(t)$. Tali equazioni risultano disaccoppiate, e si possono risolvere separatamente: risulta infatti $\dot{z} = \ddot{x} + i\omega\dot{x}$, e dunque, usando la (1.34) per sostituire $\ddot{x}$ e raccogliendo $i\omega$, si ha

$$\dot{z} = i\omega z + F(t)\,; \tag{1.45}$$

allo stesso modo si trova $\dot{w} = -i\omega w + F(t)$. Se tuttavia F e i dati iniziali sono reali, allora le variabili z e w, e le rispettive equazioni, sono l'una la complesso–coniugata dell'altra: perciò per risolvere la (1.34) è sufficiente considerarne una sola, ad esempio la (1.45), scrivendo poi $x(t) = \omega^{-1}\mathrm{Im}\, z(t)$.

Per $F = 0$ la soluzione della (1.45), corrispondente al dato iniziale $z_0 = v_0 + i\omega x_0$, è $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$, come si verifica immediatamente; non è poi difficile verificare che per F qualsiasi la soluzione della (1.45), corrispondente al medesimo dato iniziale z_0, è data da[53)]

$$z(t) \;=\; e^{i\omega t}\left[z_0 + \int_0^t e^{-i\omega s} F(s)\,\mathrm{d}s\right];$$

in forma reale, è facile vedere che si ha allora

$$x(t) \;=\; x_l(t) + \frac{1}{\omega}\int_0^t F(s)\sin[\omega(t-s)]\,\mathrm{d}s\ .$$

In questo modo la soluzione della (1.45) è riportata *a una quadratura,* cioè all'esecuzione di un integrale ordinario (operazione questa sostanzialmente più elementare della risoluzione di un'equazione differenziale, anche se F è complicata e l'integrale non si sa scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari). Questa soluzione è precisamente della forma che stavamo cercando. Maggiori informazioni sulla soluzione possono aversi soltanto a seguito di particolari scelte di F.

Una buona trattazione delle oscillazioni forzate, comprendente il caso (bellissimo) di oscillatori forzati non lineari, e anche equazioni non autonome del tipo $\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon\cos\Omega t)x = 0$ (che conducono all'interessante fenomeno della *risonanza parametrica*), si può trovare nel testo di Landau e Lifšitz.[54)] Equazioni, lineari o meno, ove un parametro varia lentamente nel tempo (ad esempio $\ddot{x} + \omega^2(\varepsilon t)\sin x = 0$, con $\omega(\tau)$ assegnata e ε piccolo) conducono invece all'importantissimo fenomeno, ancora oggetto di ricerca, degli *invarianti adiabatici,* interessante anche in relazione alla quantizzazione dei sistemi di oscillatori. Per questo fenomeno si rimanda ai testi di V.I. Arnold più volte citati.

1.5 Cicli limite e oscillazioni di rilassamento

1.5.1 Un semplice esempio di ciclo limite

Il pendolo matematico non descrive adeguatamente il comportamento di un pendolo reale, perché si deve tener conto dello smorzamento (dovuto all'aria e ad altri

---

[53)] La deduzione si può ottenere con il classico *metodo di variazione delle costanti.* Avendo in mente la soluzione $z_0 e^{i\omega t}$ corrispondente a $F = 0$, si ricerca una soluzione della forma $z(t) = \zeta(t)e^{i\omega t}$; si trova allora $\dot{\zeta} = F(t)e^{-i\omega t}$, e quindi $\zeta(t)$ per integrazione.

[54)] L. Landau e E. Lifšits, *Fisica teorica I; Meccanica*, Editori Riuniti (Roma).

attriti) che lo frena; per bilanciare questo effetto occorre dunque un meccanismo che fornisca sistematicamente dell'energia. Un altro aspetto considerevole è il fatto che nel pendolo matematico si ha un continuo di moti periodici, il cui periodo dipende tuttavia dall'ampiezza delle oscillazioni, mentre per un orologio si richiede che esso presenti un solo periodo, eventualmente regolabile con un parametro esterno; inoltre occorre che l'orologio si porti rapidamente ad oscillare con quel periodo, in maniera largamente indipendente dalla particolare scelta dei dati iniziali. Occorre pertanto che il sistema dinamico descrivente un orologio presenti un'orbita periodica "isolata", e che questa "attragga" i movimenti che partono abbastanza vicini. A orbite di questo tipo fu dato da Poincaré il nome di *ciclo limite*.[55] Il più semplice esempio è forse quello di un modello non differenziabile, introdotto da A.Andronov, A. Vitt e S.Khaikin, *Theory of oscillators* (Pergamon Press, 1960). Si tratta di un oscillatore armonico debolmente smorzato, forzato impulsivamente, come ora passiamo a descrivere.

Ricordiamo che l'oscillatore armonico debolmente smorzato $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$, con $0 < \mu < \omega$, è il prototipo di fuoco stabile: nel piano delle fasi (x, v) l'orbita cade spiraleggiando sull'origine. L'orbita dunque non è periodica come nel caso $\mu = 0$ (oscillatore armonico); l'intervallo di tempo $T = \frac{2\pi}{\sigma}$, con $\sigma = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$, è tuttavia ancora significativo, perché proprio con tale periodo l'orbita attraversa ogni semiasse uscente dall'origine, ad esempio quello delle velocità positive[56]; ma l'ampiezza (distanza dall'origine) decresce costantemente, e precisamente in maniera esponenziale, come mostra la soluzione analitica:

$$x(t) = e^{-\mu t} A \cos(\sigma t + \varphi) \ , \qquad v(t) = e^{-\mu t} A \left[-\mu \cos(\sigma t + \varphi) + \sigma \sin(\sigma t + \varphi) \right] .$$

Dunque l'orbita attraversa il semiasse delle velocità positive a tempi $t_n = nT$, nei punti di ordinata $v_n = a^n v_0$, con $a = e^{-\mu T} < 1$.

Aggiungiamo ora al sistema una forzante impulsiva, che agisce nel modo seguente: nell'istante in cui l'orbita nello spazio delle fasi attraversa il semiasse positivo delle velocità (cioè il punto materiale passa in $x = 0$ con velocità positiva), si trasmette all'oscillatore un impulso istantaneo positivo, che ne incrementa la velocità di una quantità fissa $d > 0$; l'idea è che l'oscillatore subisca un urto da un dispositivo liberato proprio dal passaggio di x sullo zero (meccanismo di *scappamento* dell'orologio).[57] Così al primo passaggio si avrà la velocità av_0 prima dell'urto, e la velocità $v_1 = av_0 + d$ dopo l'urto; al secondo passaggio si ha $av_1 = a(av_0 + d)$ prima dell'urto, e

---

[55] Le medesime proprietà devono evidentemente presentarsi anche nei circuiti oscillanti con cui funzionano ad esempio le radio. Per questo motivo uno dei più famosi esempi di equazioni con ciclo limite è quello di Van der Pol, descritto più avanti, che fu proprio introdotto per descrivere circuiti oscillanti.

[56] Questo fatto viene confermato in maniera più significativa in virtù semplicemente della linearità dell'equazione, quando si sappia che l'orbita interseca almeno due volte un semiasse. Infatti, sia $\mathbf{x}_0 = (0, v_0)$ il dato iniziale nel piano delle fasi e sia $\mathbf{x}_1 = (0, v_1)$ il punto dopo il periodo T, con $v_1 = av_0$, $0 < a < 1$, (dunque $\mathbf{x}_1 = a\mathbf{x}_0$). Allora per la linearità dell'equazione, se $\mathbf{x}(t)$ è la soluzione relativa al dato iniziale $\mathbf{x}_0$, segue che $\bar{\mathbf{x}}(t) = a\mathbf{x}(t)$ è la soluzione relativa al dato iniziale $\mathbf{x}_1 = a\mathbf{x}_0$; e poiché $\mathbf{x}(T) = a\mathbf{x}_0$, segue che $\bar{\mathbf{x}}(T) = a^2\mathbf{x}_0$.

[57] Si osservi che la forzante non è periodica *a priori,* come per le oscillazioni forzate; la periodicità è invece creata dalla dinamica stessa del sistema.

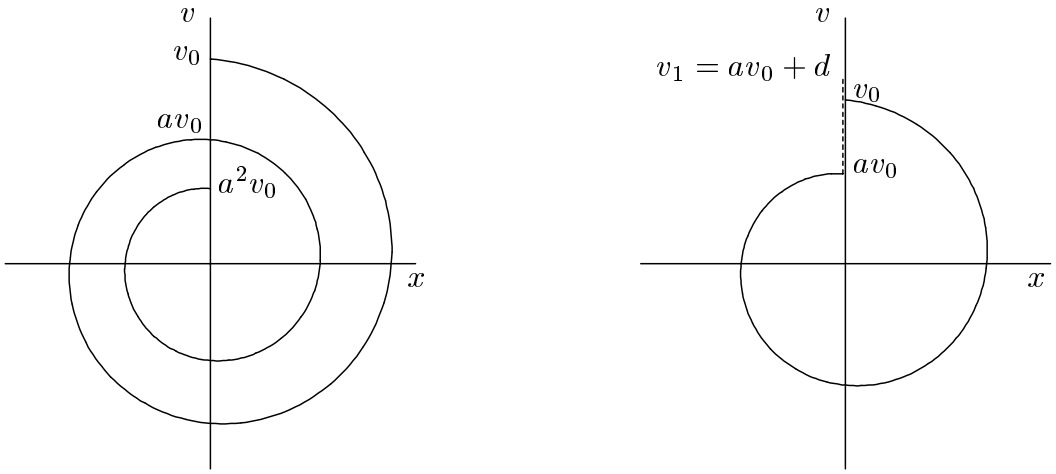


Fig. 1.17. *L'oscillatore debolmente smorzato, forzato impulsivamente*

$v_2 = av_1 + d = a(av_0 + d) + d$ dopo l'urto, e così via. Si ha in tal modo una una trasformazione $v' = f(v)$, definita da

$$f(v) = av + d \ , \qquad 0 < a < 1 \ , \quad d > 0 \ , \tag{1.46}$$

tra la velocità v al generico passaggio e la velocità v' al passaggio successivo (*mappa di Poincaré*, o *Poincaré – mapping*).

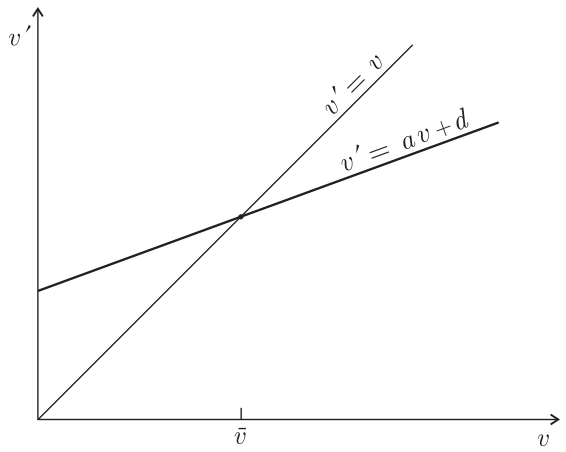


Fig. 1.18. *La trasformazione di Poincaré,* $v' = av + d$

L'analisi delle orbite indotte da questa trasformazione è elementare. Anzitutto esiste per la trasformazione un unico punto fisso $\bar{v}$, soluzione di $f(v) = v$, ovvero intersezione della retta $v' = f(v)$ con la bisettrice $v' = v$; a tale punto fisso corrisponde un'orbita periodica nello spazio delle fasi. Si stabilisce poi senza difficoltà che tale punto è un *attrattore globale*, cioè che ogni punto iniziale "vi cade sopra" (s'intende, in un numero infinito di iterazioni). A tal fine basta studiare la successione $\{v_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ definita da $v_{n+1} = f(v_n)$, ovvero

$$v_{n+1} = av_n + d \ . \tag{1.47}$$

- **Esercizio 1.13:** Si dimostri che per ogni v_0 la successione $\{v_n\}$ definita sopra converge al limite $\bar{v} = d/(1-a)$, precisamente che si ha $v_n = \bar{v} + a^n(v_0 - \bar{v})$.

Esiste un bel metodo grafico per stabilire la convergenza al punto fisso in maniera qualitativa (Fig. 19). Si parte da un arbitrario v_0, ci si sposta verticalmente fino alla curva $v' = f(v)$, si trasla orizzontalmente fino a incontrare la bisettrice (in queso modo si riporta in ascissa il valore $v_1 = f(v_0)$), ci si sposta ancora verticalmente fino alla curva, si trasla orizzontalmente fino alla bisettrice, e così via. Si noti che tale metodo grafico non fa mai uso della linearità della trasformazione $v' = f(v)$, e può essere pertanto esteso per determinare le orbite $\{v_n\}$ per ogni trasformazione $v' = f(v)$.

- **Osservazione.** La trasformazione (1.47) è frutto di una schematizzazione in parte azzardata: oscillatore esattamente armonico, smorzamento esattamente lineare, salto di velocità d indipendente da v_n. E' chiaro tuttavia che nessuna di queste ipotesi è essenziale: delle piccole variazioni non modificano l'aspetto qualitativo del fenomeno, che, come mostra il metodo grafico, si basa su poche proprietà qualitative della funzione f. In particolare, basta assumere che sia $f(0) > 0$ e $|f'(v)| \leq a < 1$, perché la trasformazione $v_{n+1} = f(v_n)$ ammetta un unico punto fisso attrattivo (si usa il teorema della contrazione).

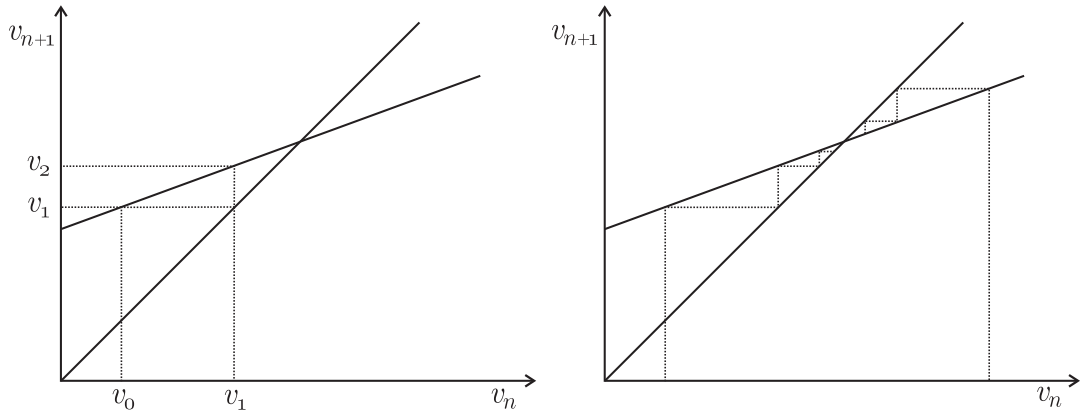


Fig. 1.19. *Metodo grafico per lo studio dell'orbita*

1.5.2 Studio qualitativo dell'equazione di Van der Pol

Consideriamo l'equazione non lineare di Van der Pol[58)]

$$\ddot{x} + \mu\big(\frac{x^2}{a^2} - 1\big)\dot{x} + \omega^2 x = 0\,, \qquad \mu > 0\,; \tag{1.48}$$

58) B. Van der Pol, *A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations*, Radio Reviews, 1, 701–710 (1920).

il coefficiente di $\dot{x}$ è positivo per $x > a$ (attrito ordinario), negativo per $x < a$ (attrito negativo). L'equazione contiene tre parametri: a che ha le dimensioni di x, e μ e ω che hanno le dimensioni dell'inverso di un tempo. Come già si è accennato nel primo paragrafo, è possibile eliminare due di questi parametri, semplicemente scegliendo unità di misura opportune, e ridursi a un unico parametro rilevante, precisamente il rapporto tra μ e ω. Formalmente si effettua la sostituzione $x = ax'$ (cioè si usa a come unità di misura per x; x' risulta adimensionale), e si introduce il tempo $t' = \omega t$, cosicché $\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}$ (cioè si usa ω^{-1} come unità di tempo; t' risulta adimensionale). Tralasciando gli apici, ed indicando ancora con punti le derivate rispetto a t', si ottiene l'equazione di Van der Pol in forma adimensionale

$$\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \ , \tag{1.49}$$

del tutto equivalente alla precedente, ove appare il solo parametro rilevante $\beta = \mu/\omega$.

Studieremo qui di seguito il sistema nell'approssimazione $\beta \gg 1$ (forte smorzamento) e poi nell'approssimaione $\beta \ll 1$ (debole smorzamento) con metodi euristici. Una dimostrazione rigorosa dell'esistenza di un ciclo limite unico, valida per ogni valore di β, è riportata nell'appendice D.

a: *Studio qualitativo del caso $\beta \gg 1$: oscillazioni di rilassamento*

E' conveniente sostituire all'equazione del secondo ordine (1.49) un sistema di due equazioni del primo ordine, procedendo in modo un po' diverso dall'usuale. A questo scopo, dopo aver osservato che l'equazione si può scrivere nella forma $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\dot{x} + \beta(\frac{1}{3}x^3 - x)\big] = -x$, poniamo $\dot{x} + \beta(\frac{1}{3}x^3 - x) = \beta y$. L'equazione (1.49) è allora equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta\big(y - f(x)\big) \\ \dot{y} = -\beta^{-1}x \, , \end{cases} \tag{1.50}$$

ove si è posto $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. Nel piano xy sono particolarmente significative due curve: la retta $x = 0$ (asse y), cui è legato il segno di $\dot{y}$, e la cubica γ di equazione $y = f(x)$, cui è legato il segno di $\dot{x}$, rappresentate in Fig. 20. Sulla curva γ si annulla $\dot{x}$: perciò essa è attraversata verticalmente, verso il basso per $x > 0$, e verso l'alto per $x < 0$.

Sfruttiamo ora l'assunzione $\beta \gg 1$. In questo caso è chiaro che, al di fuori di un piccolo intorno di γ, le traiettorie sono praticamente parallele all'asse x: la pendenza infatti è data da

$$\alpha = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\beta^{-2}\frac{x}{y - f(x)} \ ,$$

e dunque lontano da γ si ha $\alpha \sim \beta^{-2} \ll 1$, cioè traiettorie orizzontali dirette verso destra al di sopra di γ, verso sinistra al di sotto. Ancora per $y - f(x) \sim \beta^{-1}$, dunque abbastanza vicino alla curva, si ha pendenza piccola, $\alpha \sim \beta^{-1}$: per avere $\alpha \sim 1$ o maggiore ($\dot{y}$ confrontabile con $\dot{x}$ o più grande) la traiettoria deve entrare in un intorno di γ ancora più piccolo, di spessore $\sim \beta^{-2}$. Concretamente, se prendiamo un dato iniziale come in Fig. 20, vediamo che con velocità grande, di ordine β, l'orbita va quasi orizzontalmente fino a γ, e solo in prossimità di γ essa comincia a deviare sensibilmente dall'orizzontale, fino ad attraversare γ verticalmente. L'orbita deve poi

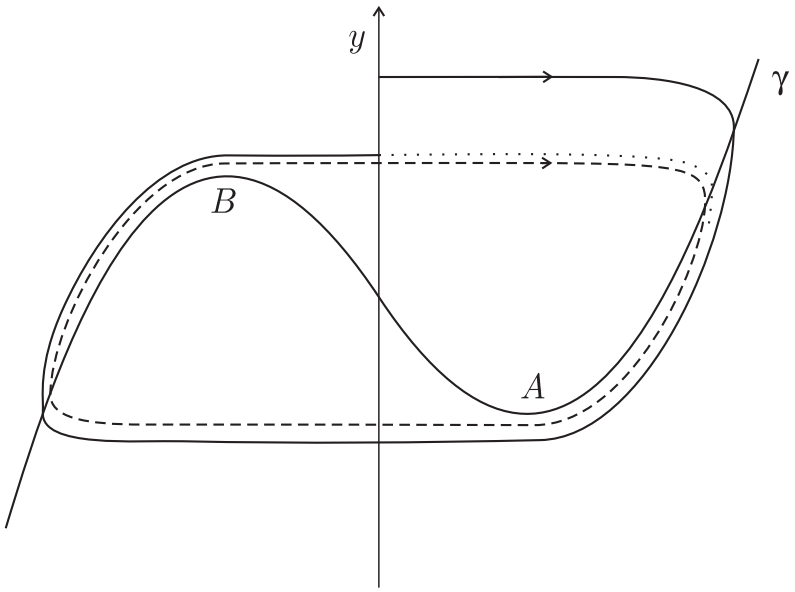


Fig. 1.20. *La cubica γ corrispondente a $x = 0$, e il ciclo limite*

seguire "lentamente" γ, con velocità $\dot{x}$ e $\dot{y}$ entrambe di ordine β^{-1}, finché non giunge in prossimità del vertice A: è chiaro infatti che essa non può né riattraversare γ in verso contrario, né allontanarsi da γ verso il basso o verso destra, perché al di fuori di un piccolo intorno di γ, e sotto γ, le orbite sono ancora praticamente orizzontali, e dirette verso sinistra. La traiettoria può invece scostarsi dalla cubica, spostandosi verso sinistra, dopo aver oltrepasato il vertice A: anzi lo fa necessariamente, perchè in prossimità di A si ha $x > 0$ e dunque $\dot{y} < 0$, mentre per continuare a seguire la cubica si dovrebbe avere $\dot{y} > 0$. Non appena la traiettoria, oltrepassato A, si scosta da γ, riprende il moto rapido orizzontale, questa volta rivolto verso sinistra, fino all'altro ramo della curva γ, dove si ha un nuovo attraversamento verticale (ora nel senso delle y crescenti). La traiettoria segue poi nuovamente la curva γ fino a B, e torna orizzontalmente sul ramo destro di γ, per infilarsi tra la traiettoria precedente e la cubica. La cosa si ripete a ogni giro. Il moto tende così molto rapidamente a un andamento limite periodico, o ciclo limite. Si vede immediatamente che il medesimo andamento limite si ha per ogni altro dato iniziale, ad esempio a destra della curva γ, o in prossimità dell'origine O, salvo che per l'origine che è un punto di equilibrio.

In maniera alquanto descrittiva si usa dire che nel caso $\beta \gg 1$ si presentano una *foliazione rapida* (o stratificazione rapida, ingl. *fast foliation*) e una *varietà lenta* (*slow manifold*) (Fig. 21); si indica la foliazione rapida con una doppia freccia. Si osservi che la varietà lenta (la curva γ) non è una varietà invariante (non è una soluzione !); essa ha una parte attrattiva e una parte repulsiva (AOB).

- **Esercizio 1.14:** Trovare la foliazione rapida e la varietà lenta per l'oscillatore armonico con forte smorzamento, $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$, $\mu \gg \omega > 0$.

Se ora ci interessiamo all'andamento del movimento $x(t)$ "a regime", cioè dopo il

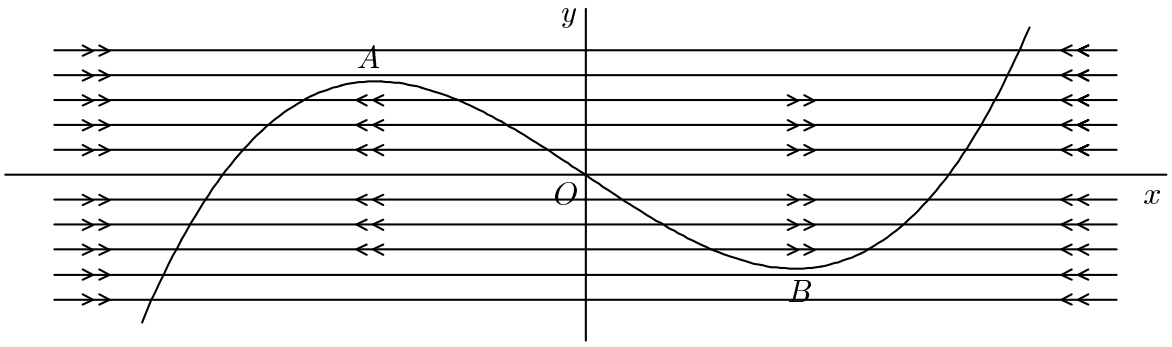


Fig. 1.21. *Foliazione rapida e varietà lenta*

movimento iniziale transitorio in cui si va ad incontrare la curva γ, una semplice analisi mostra immediatamente che esso è della forma illustrata in Fig. 22, sicché il moto è pressoché periodico, ma procede "a balzi".

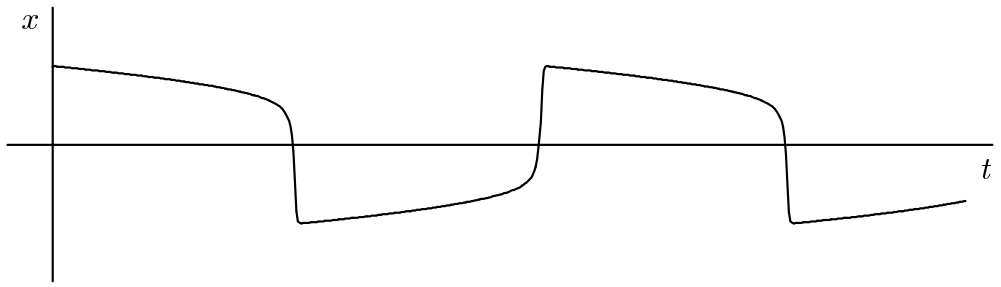


Fig. 1.22. *Oscillazione di rilassamento, a balzi, per grande smorzamento ($\beta = 10$)*

b: *Studio qualitativo del caso $\beta \ll 1$; introduzione alla teoria delle perturbazioni (principio della media)*

Per $\beta = 0$ l'equazione di Van der Pol (1.49) si riduce a quella dell'oscillatore armonico $\ddot{x} + x = 0$, ovvero $\dot{x} = v, \dot{v} = -x$; per β piccolo si dice che essa ne è una *perturbazione.* L'idea centrale per trattare il problema nel caso $\beta \ll 1$ consiste nell'osservare che in tal caso esistono, come vedremo, una *variabile lenta* e una *variabile veloce*, e che inoltre la variabile lenta è di di maggiore interesse, mentre quella veloce è meno rilevante. Si rinuncia allora a una descrizione completa, che contiene una sovrabbondanza di informazioni, e ci si limita invece a una descrizione in un certo senso approssimata della variabile lenta, che è quella di maggiore interesse. E' questo dunque un primo esempio di un procedimento generale che può dirsi di *riduzione*[59], cui accenneremo nuovamente a proposito della meccanica statistica.

La distinzione tra i due tipi di variabili, lenta e veloce, è spontanea nel caso limite $\beta = 0$. Infatti, nel caso dell'oscillatore armonico esiste una costante del moto che è

[59] Per una bella rassegna sul problema della descrizione ridotta in sistemi di equazioni differenziali, si veda N.G. van Kampen, *Elimination of fast variables,* Physics Reports **124**, 96–160 (1985).

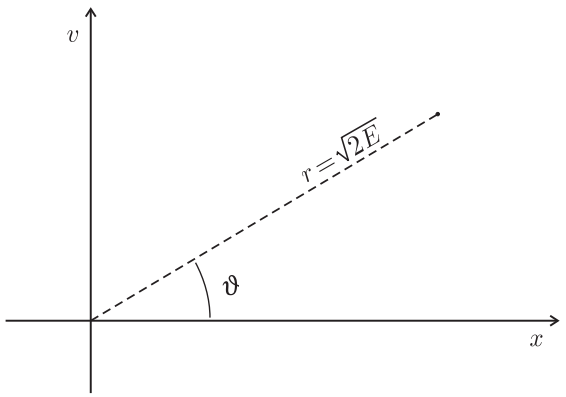


Fig. 1.23. *Variabile lenta (E) e veloce (θ) per β piccolo*

proprio l'energia

$$E = \frac{1}{2}(v^2 + x^2) \ , \tag{1.51}$$

ovvero, a meno del fattore 2, proprio il quadrato della distanza dall'origine nel piano (x, v). E' dunque naturale passare, nel piano delle fasi, dalle coordinate cartesiane (x, v) alle corrispondenti coordinate polari (r, θ), con $x = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$, o equivalentemente alle variabili (E, θ), con $E = \frac{1}{2}r^2$, che risultano un po' più convenienti (Fig. 23). Allora sappiamo che per E vale $\dot{E} = 0$, mentre per θ si deduce subito $\dot{\theta} = -1$,[60] e dunque per $\beta = 0$ abbiamo le equazioni

$$\begin{cases} \dot{E} = 0 \\ \dot{\theta} = -1 \ . \end{cases} \tag{1.52}$$

Se dunque ora usiamo le stesse coordinate anche per l'equazione di Van der Pol completa, con $\beta \neq 0$, è evidente[61] che si ottiene un sistema della forma

$$\begin{cases} \dot{E} = \quad \beta f(E, \theta) \\ \dot{\theta} \ = -1 + \beta g(E, \theta) \end{cases} \tag{1.53}$$

con opportune funzioni $f(E, \theta)$, $g(E, \theta)$. Si mostra subito che vale[62]

$$f(E, \theta) = -2E\sin^2\theta(2E\cos^2\theta - 1) \ , \tag{1.54}$$

mentre $g(E, \theta)$ ha una certa espressione che qui non ci importa determinare.[63]

---

[60] Infatti, da $\theta = \arctan v/x$ si ottiene

$$\dot{\theta} = \frac{1}{1 + (v/x)^2}\frac{\dot{v}x - v\dot{x}}{x^2} = \frac{-x^2 - v^2}{x^2 + v^2} = -1 \ .$$

[61] In realtà ci si potrebbero aspettare termini ulteriori, di ordine β^2, che di fatto non ci sono (e la cui presenza sarebbe comunque ininfluente).

[62] Si è già mostrato che per un'equazione della forma $\ddot{x} = -V'(x) + F_2(x, \dot{x})$, per l'energia $E = T + V$ si ottiene $\dot{E} = \dot{x}F_2$; qui è $F_2 = -\beta(x^2 - 1)\dot{x}$, e dunque $\dot{E} = -\beta\dot{x}^2(x^2 - 1)$, da cui segue subito la formula data.

[63] Si trova comunque facilmente $g = \sin\theta\cos\theta(2E\cos^2\theta - 1)$.

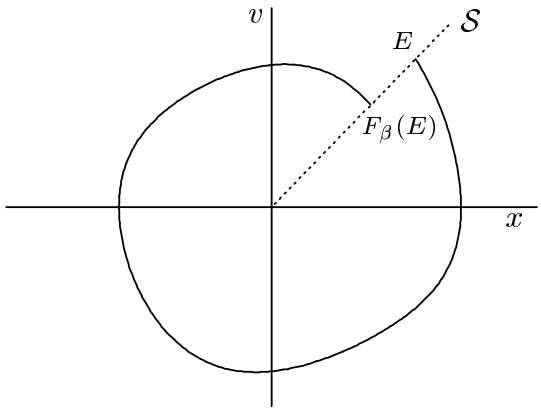


Fig. 1.24. *La semiretta $\mathcal{S}$ come sezione di Poincaré.*

Non è difficile dimostrare che che il sistema (1.53) ammette un moto periodico attrattivo. A tal fine fissiamo l'attenzione su una qualunque semiretta $\mathcal{S}$ uscente dall'origine, con $\theta = \theta_0$ assegnato (sezione di Poincarè), e consideriamo un dato iniziale (E_0, θ_0) su $\mathcal{S}$. Per $\beta = 0$ la traiettoria riattraversa $\mathcal{S}$ in (E_0, θ_0), dopo il periodo $T_0 = 2\pi$; per $\beta > 0$ piccolo possiamo dire che la traiettoria attraverserà la semiretta in E_1 prossimo a E_0, dopo un tempo T_β prossimo a T_0 (si ricordi il teorema di esistenza e unicità, nella parte di regolarità della soluzione al variare dei parametri; si osservi che, per β piccolo, $\dot\theta$ ha segno costante). In questo modo resta definita una applicazione $E_1 = F_\beta(E_0)$ (mappa di Poincaré di $\mathcal{S}$ in sé), e per iterazione si ottengono poi $E_2, E_3, \ldots$, con $E_{i+1} = F_\beta(E_i)$; si veda la Fig. 24. Mostriamo che, se β è sufficientemente piccolo, allora esiste un punto fisso $E^*(\beta)$ per la mappa F_β (corrispondente a un moto periodico del sistema), e che inoltre, per ogni fissato $E_0 \neq 0$ e β sufficientemente piccolo, la successione $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ converge verso $E^*(\beta)$ (ovvero tale moto è attrattivo).

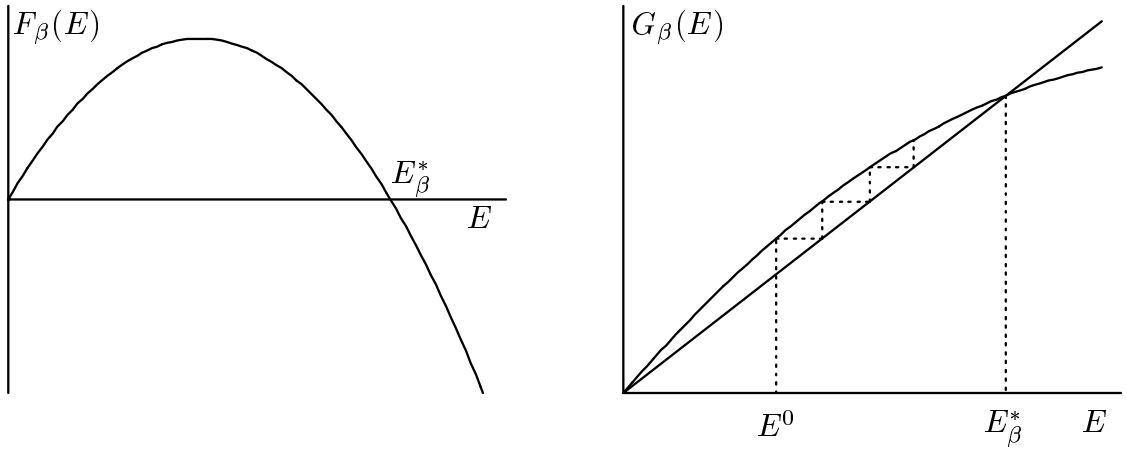


Fig. 1.25 *L'andamento di $F_\beta(E)$ e di $G_\beta(E)$.*

A tale scopo (questo è il punto importante) non risulta necessario conoscere esat-

tamente la mappa F_β, ma è sufficiente calcolarla al primo ordine in β. Tale calcolo è facile: detto infatti T_β il tempo trascorso nel passaggio da E_i a E_{i+1}, se indichiamo con $E(t,\beta)$, $\theta(t,\beta)$ il moto (incognito) in tale intervallo di tempo, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} E_{i+1} - E_i &= \beta \int_0^{T_\beta} f(E(t,\beta),\theta(t,\beta))\mathrm{d}t \\ &= \beta \int_0^{2\pi} f(E_i, \theta_0 - t)\mathrm{d}t + \mathcal{O}(\beta^2) \\ &= -2\beta E_i \int_0^{2\pi} \sin^2 t(2E_i \cos^2 t - 1)\mathrm{d}t + \mathcal{O}(\beta^2) \ , \end{aligned}$$

avendo usato le ovvie relazioni $E(t,\beta) = E_i + \mathcal{O}(\beta)$, $\theta(t,\beta) = \theta_0 - t + \mathcal{O}(\beta)$, $T_\beta = 2\pi + \mathcal{O}(\beta)$ (che sono conseguenza della regolarità sopra ricordata delle soluzioni al variare dei parametri). Eseguendo l'integrale si trova

$$E_{i+1} - E_i = -\beta\, E_i(aE_i - b) + \mathcal{O}(\beta^2) \ , \tag{1.55}$$

con $a, b > 0$, precisamente $a = \pi$, $b = 2\pi$;[64] si ha dunque

$$F_\beta(E) = E - \beta E(aE - b) + \mathcal{O}(\beta^2) \ ,$$

che è il risultato cercato.

Si vede ora in un momento che F_β ha un punto fisso E^*_β prossimo a $E^*_0 = b/a = 2$. Infatti si ha

$$F_\beta(E) = E + \beta G_\beta(E), \qquad G_\beta(E) = -E(aE - b) + \mathcal{O}(\beta) \ ,$$

perciò si trova un punto fisso di F_β in corrispondenza a ogni zero di G_β. Ma G_β è prossima alla parabola $G_0(E) = E(aE - b)$, che in $E^*_0 = b/a$ ha uno zero "trasverso", cioè con derivata $G'(E^*_0) \neq 0$; tale zero necessariamante persiste, e si sposta di poco, se si modifica di poco G (in modo regolare), cioè per β piccolo.

L'andamento qualitativo di G_β e F_β è rappresentato in Fig. 25. Che il punto fisso E^*_β sia attrattivo segue immediatamente dal fatto che $E_{i+1} > E_i$ per $G_\beta(E_i) > 0$, dunque per $E_i < E^*_\beta$, e viceversa $E_{i+1} < E_i$ per $E_i > E^*_\beta$. Procedendo come per l'orologio meccanico, si vede bene che iterando la mappa di Poincaré F_β si ha l'andamento illustrato in figura. Le successioni $E_0, E_1, \ldots, E_i, \ldots$ sono monotone, come è ovvio dalla figura, e come segue dal fatto che le traiettorie dell'equazione di Van del Pol non possono intersecarsi. Anche l'origine è un punto fisso, però instabile.

- **Osservazione (principio della media).** Al medesimo risultato si giunge in modo rapido applicando il cosiddetto *principio della media,* che è il cuore della teoria delle perturbazioni. Il fatto fondamentale (che con evidenza è anche alla base della dimostrazione data sopra) è che $\dot E$ è di ordine β (ovvero, come già si è detto, E è una *variabile lenta*), mentre $\dot\theta$ è di ordine 1 (cioè θ è una *variabile veloce*). E' allora sensato (ma la validità dell'approssimazione è, in generale, un

[64] Il calcolo esplicito dell'integrale serve solo a determinare numericamente a e b: che siano costanti positive è ovvio, e questa è la sola cosa rilevante.

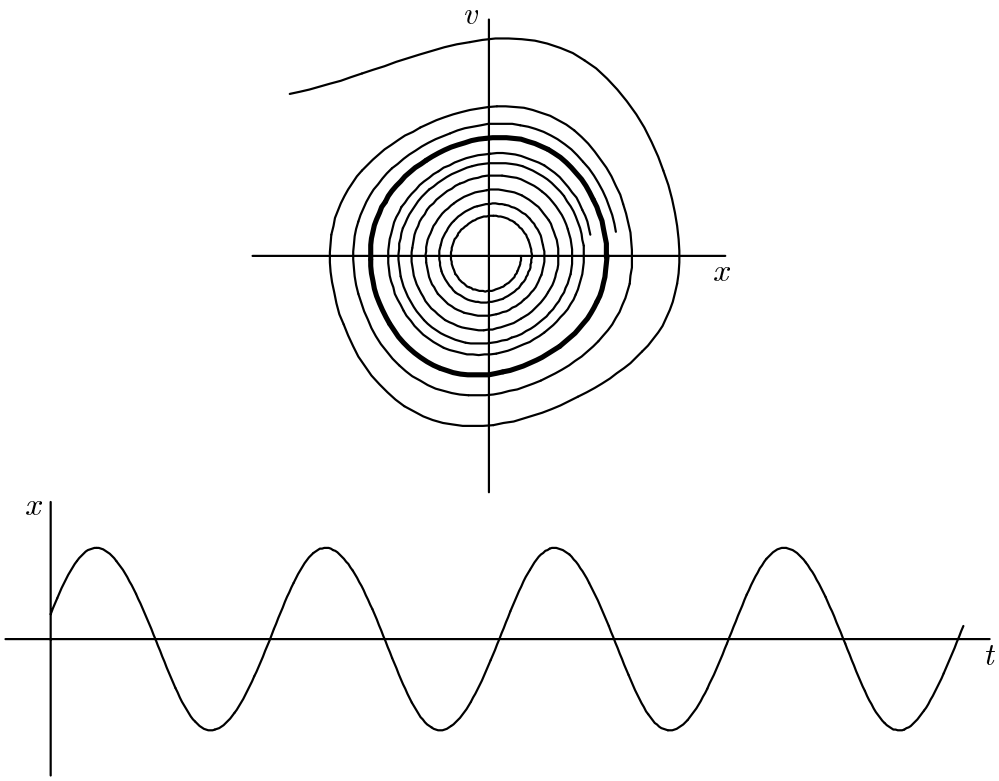


Fig. 1.26. *Il ciclo limite nel piano xv, per piccolo smorzamento ($\beta = 0.1$); il corrispondente andamento quasi sinusoidale di $x(t)$*

argomento assai delicato) sostituire all'equazione vera (1.53) per la variabile lenta la corrispondente equazione "mediata sulla variabile veloce", ovvero l'equazione che si ottiene sostituendo a $f(E,\theta)$ la sua media $\overline{f}(E)$ lungo un periodo del moto imperturbato di θ, $\overline{f}(E) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f(E,\theta - t)\mathrm{d}t$. Si ottiene in questo modo un'equazione chiusa per la sola variabile E, precisamente, eseguendo l'integrale (che significativamente è lo stesso calcolato prima)

$$\dot{E} = -\beta E(aE - b) \ .$$

Questa equazione è coerente, a meno di termini $\mathcal{O}(\beta^2)$, con la (1.55), cui essa conduce per integrazione nell'intervallo di tempo $(0, 2\pi)$; da essa è particolarmente evidente l'esistenza di un punto fisso attrattivo (basta guardare il segno di $\dot{E}$). Il principio della media è il cuore della teoria perturbativa fin dai tempi di Lagrange; sulla sua giustificazione teorica non possiamo qui soffermarci ulteriormente.[65)]

In conclusione, ritornando alle variabili (x, v), possiamo allora affermare che, per β piccolo, esiste una curva invariante prossima al cerchio $x^2 + v^2 = 2$ (corrispondente

---

65) Si veda V.I. Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti (Roma); e *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Cap. 3., Editori Riuniti (Roma, 1989); Freidlin e Wentzell, *Random Perturbations of Dynamical Systems* (Springer, 1984).

al valore $E^* = 1$); su tale curva ha luogo un moto periodico, e inoltre essa attrae ogni altra soluzione (con $E \neq 0$) (Fig. 26, sopra). Si noti che la curva $x(t)$, in questo caso di piccolo smorzamento, ha andamento periodico "liscio", tendente per $\beta \to 0$ alla sinusoide $x(t) = \sqrt{2}\cos(\theta_0 - t)$ (Fig. 26, sotto), ben dissimile da quello "a salti" relativo al caso $\beta \gg 1$.

APPENDICE A

Una funzione di Ljapunov per l'oscillatore armonico smorzato

Dall'equazione del moto

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

si ricava subito che l'energia (per unità di massa)

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

segue la legge $\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x\dot{x} = (\ddot{x} + \omega^2 x)\dot{x} = -2\mu\dot{x}^2 \leq 0$; ciò non basta però a dimostrare la stabilità asintotica dell'origine, perché $\dot{E}$ si annulla su tutta la retta $\dot{x} = 0$, e non solo nell'origine. Consideriamo allora, in luogo di E, la seguente funzione:

$$\mathcal{W}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(E + F)\ , \qquad F = \frac{1}{2}[(\dot{x} + 2\mu x)^2 + \omega^2 x^2]$$

(si osservi che per $\mu = 0$ risulta $\mathcal{W} = E$). Si vede facilmente che $\mathcal{W}$ è una buona funzione di Ljapunov: infatti $\mathcal{W}$ si annulla nell'origine, ed è positiva altrove, mentre risulta

$$\begin{aligned}\dot{F} &= (\dot{x} + 2\mu x)(\ddot{x} + 2\mu\dot{x}) + \omega^2 x\dot{x} \\ &= (\dot{x} + 2\mu x)(-\omega^2 x) + \omega^2 x\dot{x} = -2\mu\omega^2 x^2\,,\end{aligned}$$

e pertanto, ricordando $\dot{E} = -2\mu\dot{x}^2$, si ha

$$\dot{\mathcal{W}} = \frac{1}{2}(\dot{E} + \dot{F}) = -2\mu(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)\,;$$

si vede così che $\mathcal{W}$ soddisfa la condizione b') del teorema di Ljapunov. Ciò basta a concludere che l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile.

La costruzione di $\mathcal{W}$ si basa sulla scelta, per così dire, indovinata di F, che è una specie di energia (nome che in verità si potrebbe dare a tutte le funzioni che per $\mu = 0$ si riducono ad E), la cui dissipazione però è proporzionale a $\dot{x}^2 + \omega^2 x^2$ anziché a $\dot{x}^2$. Si potrebbe vedere che vi sono realizzazioni dell'equazione dell'oscillatore armonico smorzato in circuiti elettrici, per le quali risulta più naturale assegnare ad F, anziché ad E, il nome di energia.

Un' interpretazione puramente matematica di F è suggerita dalla seguente considerazione. Poiché l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato può scriversi nella forma $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x} + 2\mu x) = -\omega^2 x$, è spontaneo considerare la variabile $y = \omega^{-1}(\dot{x} + 2\mu x)$; si vede allora immediatamente che y segue la medesima equazione di x, cioè $\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0$, e che la sua "energia" $\frac{1}{2}(\dot{y}^2 + \omega^2 y^2)$ coincide con F.

APPENDICE B

Studio dei punti singolari per autovalori nulli o coincidenti

Aggiungiamo qui poche considerazioni sul comportamento del sistema lineare

$$\dot{\mathbf{x}} = A\,\mathbf{x}\ , \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\ , \tag{1.56}$$

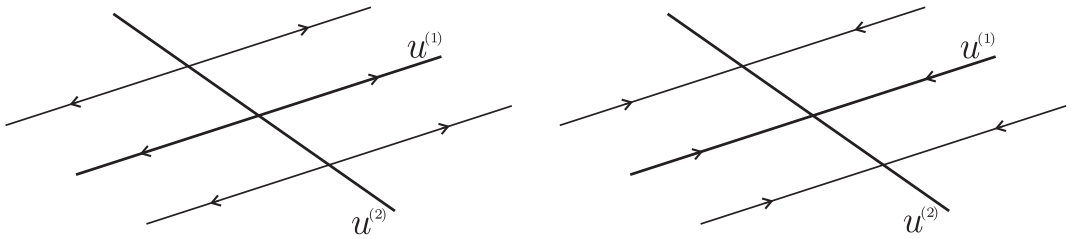
quando il punto $(\mathrm{Tr}\,A, \det A)$, rappresentativo della matrice A nel diagramma di biforcazione, si trova sull'asse $\det A = 0$ oppure sulla parabola $(\mathrm{Tr}\,A)^2 - 4\det A = 0$; in quest'ultimo caso comprenderemo anche l'origine $\mathrm{Tr}\,A = \det A = 0$.

a) La curva $\det A = 0$**, per** $\mathrm{Tr}\,A \neq 0$**.**

La trattazione è semplice, perché (al pari dei nodi e dei punti di sella) la matrice A è diagonalizzabile: più precisamente, in questo caso esistono due autovalori reali $\lambda_1 = \mathrm{Tr}\,A \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$, e i corrispondenti autovettori $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$ (che certamente sono indipendenti) si possono prendere reali. Il sistema ammette allora le soluzioni particolari $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}^{(1)}$, $\lambda \equiv \lambda_1$, e $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}^{(2)}$, combinando le quali si ottiene l'integrale generale nella forma

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda\, t}\mathbf{u}^{(1)} + C_2\mathbf{u}^{(2)}\ .$$

La direzione di $\mathbf{u}^{(1)}$ è dilatante o contraente, a seconda del segno di $\lambda = \mathrm{Tr}\,A$; la direzione di $\mathbf{u}^{(2)}$ è neutra, e l'asse $\mathbf{u}^{(2)}$ si decompone in un continuo di punti singolari. Si hanno pertanto i ritratti in fase tracciati in Fig. 27.



$(\lambda > 0)$ $\qquad\qquad$ $(\lambda < 0)$

Fig. 1.27. *Il caso* $\det A = 0$

Per $\lambda > 0$ l'origine è punto di equilibrio instabile per tempi positivi, mentre per $\lambda < 0$ tale punto è stabile (ma non asintoticamente stabile); il comportamento ovviamente si inverte per tempi negativi.

- **Osservazione.** La stabilità può venir meno, o mutarsi in stabilità asintotica, non solo per variazioni arbitrariamente piccole di $\det A$ (passaggio a nodo o a

colle), ma anche semplicemente aggiungendo alla (1.56) termini non lineari: per convincersene basta considerare l'esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = a x_2^3 \end{cases} , \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

con evidenza si ha stabilità asintotica per $a < 0$, e instabilità per $a > 0$.

b) La curva $(\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4 \det A = 0$.

Questo caso è più delicato perché vi sono due autovalori coincidenti, $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, A$, e di conseguenza, in generale, la matrice A non possiede due ma un solo autovettore (il secondo esiste solo nel caso particolare in cui A sia multipla dell'identità, $A = \lambda I$). Un esempio di tali matrici è dato da

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} ;$$

il vettore $\mathbf{u} = (1, 0)$ è autovettore con autovalore λ, e per $a \neq 0$ non ne esistono altri (indipendenti da $\mathbf{u}$). Possiamo limitarci a trattare questo caso: si vede infatti immediatamente che ad esso ci si può sempre ricondurre con un banale cambio di coordinate, precisamente una rotazione che porti l'asse x_1 a coincidere con la direzione di $\mathbf{u}$ (l'elemento di matrice A_{21} è allora necessariamente nullo, e sulla diagonale compaiono i due autovalori coincidenti).[66)]

Siamo così condotti a considerare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 + a x_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2 \ . \end{cases}$$

La seconda equazione si risolve immediatamente, e dà

$$x_2(t) = x_2^0 e^{\lambda t};$$

la prima diviene allora un'equazione lineare forzata, precisamente $\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2^0 e^{\lambda t}$, e se ne trova facilmente la soluzione (ad esempio con il metodo di variazione delle costanti), precisamente

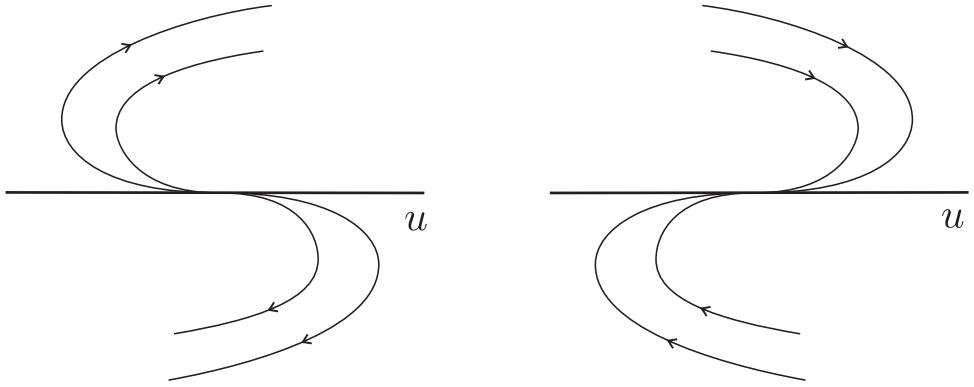
$$x_1(t) = (x_1^0 + a x_2^0 t) e^{\lambda t} \ .$$

L'andamento qualitativo di tali curve è riportato in Fig. 28, per $a > 0$ (il caso $a < 0$ è lasciato come esercizio).

Si osservi che le traiettorie sono tangenti nell'origine al vettore $\mathbf{u}_1$. Il comportamento è in un certo senso intermedio tra quello del fuoco e quello del nodo; al pari di questi due casi si ha la stabilità asintotica nel futuro per $\lambda = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, A < 0$, nel passato per $\mathrm{Tr}\, A > 0$.

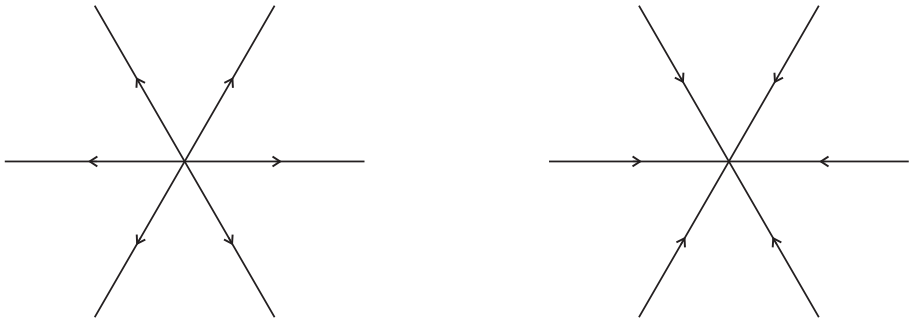
---

66) Anzi, per $a \neq 0$, il riscalamento $x_2 = a^{-1} x_2'$ conduce alla forma ancor più particolare (forma di Jordan) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.



$(\lambda > 0)$ $(\lambda < 0)$

Fig. 1.28. *Il caso* $\Delta = 0$, $a \neq 0$



$(\lambda > 0)$ $(\lambda < 0)$

Fig. 1.29. *Il caso* $\Delta = 0$, $a = 0$ $(A = \lambda I)$

Infine per $a = 0$ la matrice A è proporzionale all'identità, pertanto ogni vettore $\mathbf{u}$ è autovettore, e ogni semiretta uscente dall'origine è invariante; l'andamento è quello riportato in Fig. 29 *(nodo a stella)*.

Resta da considerare l'origine del diagramma di biforcazione, ovvero matrici del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{1.57}$$

cui ci si può sempre ricondurre nel modo indicato sopra. Per $a = 1$ si ha il caso ben noto del moto libero, per $a \neq 0$ qualsiasi si vede immediatamente che il comportamento è sostanzialmente identico[67] (il caso $a = 0$ è evidentemente banale); in ogni caso l'asse x_1 si decompone in un continuo di punti singolari. Il sistema lineare è instabile sia per

[67] Come già indicato, al caso $a = 1$ ci si può rempre riportare con un riscalamento dell'asse x_2.

tempi positivi che per tempi negativi, ma il comportamento può mutare per aggiunta di termini non lineari.

- **Esercizio 1.15:** si trovino degli esempi di sistemi non lineari con A della forma (1.57), tali che si abbia: (a) stabilità per tutti i tempi; (b) stabilità non asintotica per soli tempi positivi; (c) stabilità asintotica per tempi positivi.

APPENDICE C

Alcuni esempi significativi di biforcazione

Scopo di questa appendice è di illustrare alcuni semplici esempi in cui, al variare di un parametro, cambia la natura di un punto singolare di un'equazione differenziale. L'analisi sarà fatta con riferimento alla matrice A che descrive il sistema linearizzato attorno a un punto singolare.

Il più semplice esempio è forse quello dell'equazione $\ddot{x} + ax = 0$, che descrive un oscillatore armonico per $a > 0$ e un repulsore armonico per $a < 0$; il caso intermedio corrispondente al valore eccezionale (chiuso di biforcazione) $a = 0$ descrive invece la particella libera. L'origine del piano delle fasi x, v è sempre un punto di equilibrio, che è un centro per $a > 0$ e un colle per $a < 0$.[68)]

Diamo ora alcuni esempi di biforcazione, scelti tra i più significativi.

a) Biforcazione "a forchetta"[69)]

Si consideri l'equazione del moto

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x + \Omega^2 \sin x \cos x \ . \tag{1.58}$$

Una semplice interpretazione di tale equazione è suggerita dalla Fig. 30: un pendolo semplice (di lunghezza l) è soggetto, oltre che al peso, a una forza elastica esercitata da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, un estremo della quale è scorrevole sull'asse orizzontale, disposto in modo che la molla sia sempre verticale. La risultante di tali forze è allora $(-mg + l\cos x)\mathbf{k}$ (essendo $\mathbf{k}$ il versore verticale ascendente); procedendo in modo elementare si ottiene subito, in luogo dell'equazione del pendolo, la (1.58), con $\omega^2 = \frac{g}{l}$ e $\Omega^2 = \frac{k}{m}$. Un'altra possibile interpretazione della (1.58) è quella del *pendolo in campo centrifugo* (detto anche *regolatore di Watt*), ovvero un pendolo posto al centro di una piattaforma rotante con velocità angolare Ω costante: il termine $\Omega^2 \sin x \cos x$, che si aggiunge all'equazione del moto del pendolo, è dovuto in questo caso alla "forza centrifuga", che bisogna introdurre per poter scrivere l'equazione di Newton nel sistema di riferimento rotante (si veda il Cap. 2).

L'equazione (1.58) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin x + \Omega^2 \sin x \cos x \ , \end{cases} \tag{1.59}$$

[68)] E' molto istruttivo comprendere in questo caso come il diverso comportamento qualitativo sia compatibile con la dipendenza continua delle soluzioni dai parametri, garantita dal teorema di esistenza e unicità. Si tratta del fatto che la dipendenza continua non è uniforme rispetto al tempo.

[69)] Inglese *pitchfork*, forcone.

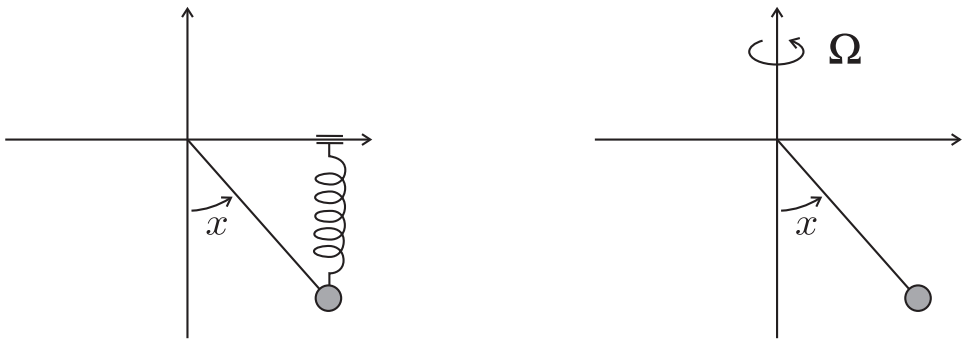


Fig. 1.30. *Due dispositivi meccanici che realizzano l'equazione (1.58)*

ed è evidente che l'origine del piano x, v è punto di equilibrio per tutti i valori dei parametri. Si trova poi immediatamente

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Omega^2 - \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

e pertanto l'origine è un centro per $\Omega^2 < \omega^2$, e un colle per $\Omega^2 > \omega^2$.

E' interessante a questo punto cercare tutti i punti di equilibrio del sistema (1.59); essi sono caratterizzati da $v = 0$, e x tale che sia

$$(-\omega^2 + \Omega^2 \cos x) \sin x = 0 \ .$$

Questa equazione è risolta da $x_1 = 0$ e $x_2 = \pi$, che annullano $\sin x$ e corrispondono ai consueti punti di equilibrio del pendolo, e inoltre da $x_{3,4} = \pm \arccos \frac{\omega^2}{\Omega^2}$; pertanto vi sono in tutto quattro posibili punti di equilibrio $\mathbf{c}_i = (x_i, 0)$, $i = 1, \ldots, 4$. Si osservi però che mentre $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ esistono per tutti i valori dei parametri, invece $\mathbf{c}_3$ e $\mathbf{c}_4$ compaiono solo per $\Omega^2 > \omega^2$, cioè esattamente quando l'origine $\mathbf{c}_1$ è divenuta un colle; dall'espressione di $x_{3,4}$ si vede che, al crescere di Ω^2 oltre ω^2, tali punti di equilibrio "escono" da $\mathbf{c}_1$, nel senso che entrambi tendono a $\mathbf{c}_1$ quando $\Omega^2 \to \omega^2$. Non è difficile vedere, esaminando la matrice $A(\mathbf{c}_{3,4})$, più precisamente il segno dell'elemento di matrica A_{21}, che essi sono centri per tutti i valori dei parametri per i quali esistono (invece $\mathbf{c}_2$ è sempre un colle). Ciò corrisponde ad esaminare l'andamento qualitativo (la curvatura) dell'energia potenziale del sistema. In effetti, all'equazione (1.58) corrisponde l'energia potenziale (per unità di massa)

$$V(x) = -\omega^2 \cos x + \frac{1}{2}\Omega^2 \cos^2 x \ ,$$

e si controlla facilmente che il grafico dell'energia potenziale ha le due forme rappresentate in Fig. 31 (con i corrispondenti ritratti in fase), per $\Omega^2 < \omega^2$ (a) e $\Omega^2 > \omega^2$ (b).

Si dice in questo caso che nell'origine si presenta una biforcazione, perché l'andamento qualitativo cambia al variare di un parametro (qui il rapporto Ω^2/ω^2).[70] Una

[70] Chiaramente, nell'energia potenziale si può fattorizzare ω^2, e questo fattore può venire riassor-

Fig. 1.31 *Potenziale e ritratto in fase per l'equazione (1.58) per $\Omega^2 < \omega^2$ (sinistra) e $\Omega^2 > \omega^2$ (destra)*

rappresentazione sintetica della biforcazione dell'origine si ottiene riportando in un grafico (*grafico della biforcazione*) l'ascissa x_i dei diversi punti di equilibrio al variare di Ω^2/ω^2. Tale grafico è riportato in Fig. 32a; le curve continue e tratteggiate corrispondono rispettivamente ai punti di equilibrio stabili e instabili.[71)] Tale biforcazione prende il nome di *biforcazione a forchetta*.

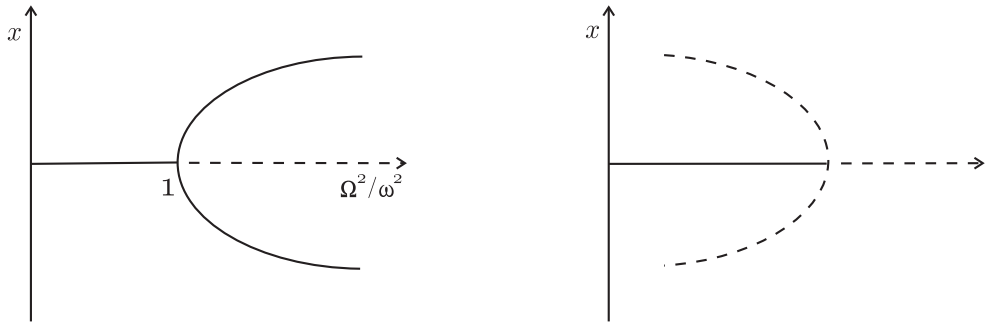


Fig. 1.32. *Grafico della biforcazione a forchetta (a) diretta e (b) inversa*

- **Esercizio 1.16:** Si trovi un sistema meccanico conservativo che dia luogo al grafico di biforcazione illustrato nella Fig. 32b (*biforcazione a forchetta inversa*).

b) Biforcazione "a forchetta" con dissipazione

L'esempio sopra riportato è caratteristico dei sistemi conservativi, per i quali si ha $\mathrm{Tr}\, A = 0$, cosicché l'unica biforcazione possibile per un punto singolare consiste

bito riscalando i tempi.

[71)] Si vede facilmente che la distanza di $\mathbf{c}_3$ e $\mathbf{c}_4$ da $\mathbf{c}_1$ è data da $d = \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)/\omega^2} + o(\omega^2 - \Omega^2)$; di conseguenza le curve rappresentative di $\mathbf{c}_3$ e $\mathbf{c}_4$ hanno tangente verticale al momento della biforcazione.

nell'attraversamento simultaneo delle curve $\Delta = 0$ e $\operatorname{Tr} A = 0$ del diagramma di biforcazione, attraverso l'origine. Se però si esce dal mondo dei sistemi conservativi, si capisce che tale passaggio simultaneo è non generico. Ad esempio, se aggiungiamo al secondo membro della (1.58) un termine dissipativo $-\beta\dot{x}$, $\beta > 0$, allora i punti singolari sono ancora $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_4$ (all'equilibrio infatti il termine dissipativo si annulla); tuttavia ora si ha $\operatorname{Tr} A = -\beta < 0$, e dunque la biforcazione si svolge in modo diverso. In particolare $\mathbf{c}_1$, che per $\Omega^2 = 0$ (e β piccolo) è un fuoco stabile, al crescere di Ω^2 dapprima attraversa la curva $\Delta = 0$ e biforca in un nodo stabile, poi attraversa la curva $\operatorname{Tr} A = 0$ e biforca in un colle. Quanto a $\mathbf{c}_3$ e $\mathbf{c}_4$, non sarebbe difficile vedere che, nel momento in cui nascono, essi sono nodi stabili, mentre successivamente, attraversando verso l'alto la curva $\Delta = 0$, diventano fuochi stabili.

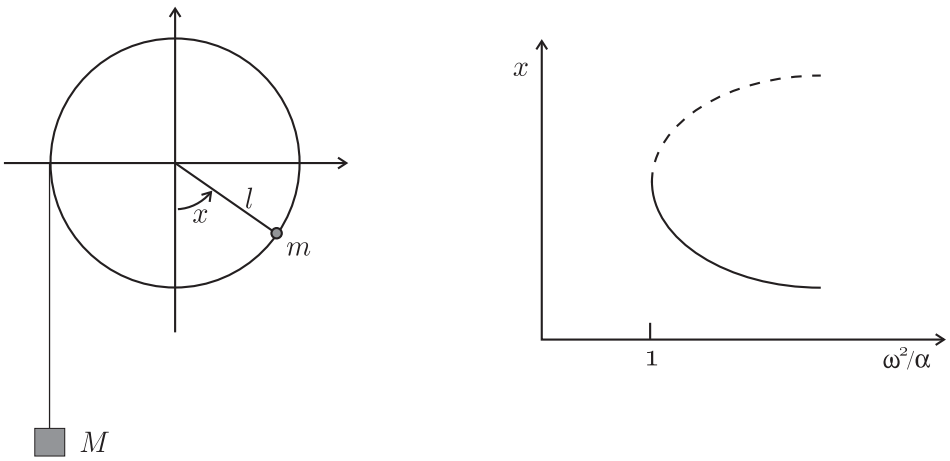


Fig. 1.33. *Un dispositivo meccanico per la biforcazione tangente e grafico della biforcazione*

c) Biforcazione tangente, o nodo–sella o piega (fold)

Consideriamo ora l'equazione che si ottiene aggiungendo all'equazione del pendolo un termine costante, precisamente

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x + \alpha \tag{1.60}$$

(una possibile realizzazione è data dal dispositivo meccanico rappresentato in Fig. 33a, per il quale si ha $\omega^2 = \frac{m}{m+M}\frac{g}{l}$ e $\alpha = \omega^2 \frac{M}{m}$). In questo caso si vede immediatamente che non vi sono punti di equilibrio per $\omega^2 < |\alpha|$, mentre ve ne sono due, uno stabile e uno instabile, per $\omega^2 > |\alpha|$.

Anche la comparsa o scomparsa di punti di equilibrio al variare di un parametro è considerata una biforcazione; il suo grafico, per l'esempio che stiamo seguendo, è rappresentato in Fig. 33b. Tale biforcazione prende il nome di *biforcazione tangente.*[72)]

[72)] La ragione del nome si comprende facilmente tracciando il grafico di $f(x) = -\omega^2 \sin x + \alpha$ per i diversi valori di α.

L'esempio più elementare, nell'ambito generale delle equazioni del primo ordine, è dato da $\dot{x} = \varepsilon + x^2$.

- **Esercizio 1.17:** Si tracci il grafico del potenziale e il ritratto in fase per il sistema descritto dall'equazione (1.59).

d) Cenno alla biforcazione di Hopf

Come ultimo esempio di biforcazione, consideriamo l'attraversamento trasversale del semiasse positivo $\mathrm{Tr}\, A$ nel diagramma di biforcazione. Tale fenomeno è possibile, ovviamente, solo per sistemi non conservativi. Un esempio banale è dato dall'oscillatore armonico smorzato, $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$: tale sistema ha come unico punto singolare l'origine, che è un fuoco stabile per $0 < \mu < \omega$, e biforca in un fuoco instabile se μ diventa negativo. Un esempio più interessante, trattato in queste note (paragrafo 1.5.2 e appendice B), ci è offerto dall'equazione di Van der Pol $\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$; passando al sistema del primo ordine $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -x - \beta(x^2 - 1)v$ si ottiene immediatamente

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix} \ ;$$

pertanto, al passaggio di β attraverso lo zero, per valori crescenti, avviene una biforcazione dell'origine da fuoco stabile a fuoco instabile, come per l'oscillatore armonico smorzato. Contemporaneamente però, come abbiamo visto, accade un fenomeno non banale, precisamente dall'origine "esce" un ciclo limite stabile.

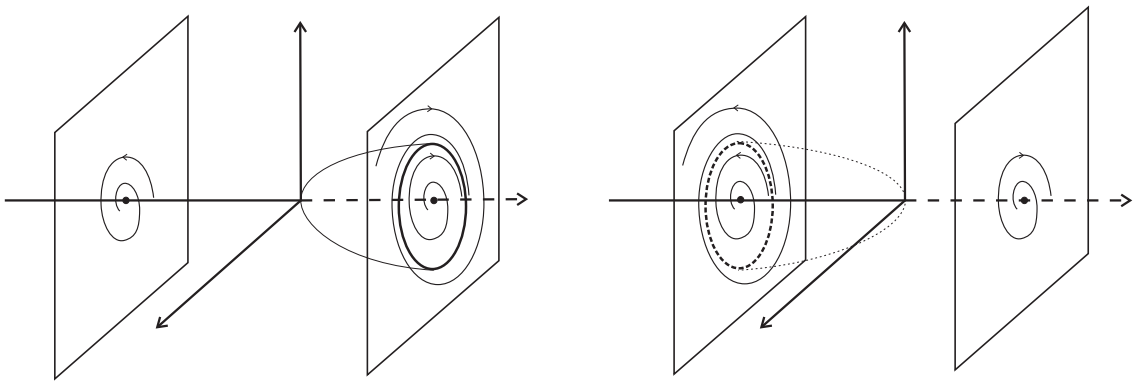


Fig. 1.34. *Biforcazione di Hopf diretta e inversa*

Si potrebbe vedere che, per una simmetria particolare dell'equazione,[73)] anche per $\beta < 0$ esiste un ciclo limite, però instabile (ovvero raggiunto per $t \to -\infty$), che per $\beta = 0$ collassa nell'origine. La presenza di un ciclo sia prima che dopo la

[73)] Si verifica facilmente che se $x(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione di Van der Pol per un dato valore di β, allora anche $\tilde{x}(t) = x(-t)$ è soluzione dell'equazione con $\tilde{\beta} = -\beta$; pertanto, cambiare segno a β è equivalente a invertire il tempo. Tale simmetria esatta fa sì che l'equazione di Van der Pol sia non generica.

biforcazione è tuttavia eccezionale: si dimostra infatti che, genericamente,[74] esistono l'uno oppure l'altro, nel caso in cui (anche in più dimensioni) due autovalori complesso–coniugati attraversano trasversalmente l'asse immaginario (*teorema di Hopf*). Basta modificare di poco l'equazione di Van der Pol per rimuovere la simmetria, e ottenere il comportamento generico. Ad esempio, impiegando metodi analoghi a quelli utilizzati per l'equazione di Van der Pol nel caso di debole dissipazione, è facile convincersi che l'equazione $\ddot{x} + (x^2 - \beta)\dot{x} + x = 0$ possiede il solo ciclo stabile dopo la biforcazione (*biforcazione di Hopf diretta*), mentre se si cambia il segno davanti a x^2 si trova il solo ciclo instabile prima della biforcazione (*biforcazione di Hopf inversa*). La biforcazione di Hopf è rappresentata simbolicamente nella Fig. 34.

[74] Anche il caso lineare dell'oscillatore armonico smorzato, privo di cicli, è evidentemente non generico.

APPENDICE D

Esistenza e unicità del ciclo limite per l'equazione di Van der Pol

Riprendiamo il sistema (1.50), che abbiamo visto essere equivalente all'equazione di Van der Pol, e dimostriamo la seguente

Proposizione 1.8: *Per ogni $\beta > 0$ esiste unico nel piano x, y un ciclo limite stabile, cui tende ogni traiettoria con dato iniziale diverso dall'origine.*

Dimostrazione. Come già si è osservato, l'asse y e la curva γ di equazione $y = f(x)$ dividono il piano in quattro regioni I – IV, simili a quadranti, dove $\dot{x}$ e $\dot{y}$ hanno segno definito, nell'ordine $(+,-)$ $(+,+)$, $(-,+)$, $(-,-)$ (Fig. 35); ciò è già sufficiente a garantire che ciascuna traiettoria con origine nell'asse y positivo, che denotiamo y^+, taglia successivamente γ^+, y^-, γ^- (con ovvio significato dei simboli), poi ancora y^+, e così via. Ha senso allora considerare l'applicazione $\sigma : y^+ \to y^+$, corrispondente al primo ritorno della traiettoria su y^+ (sezione di Poincaré).

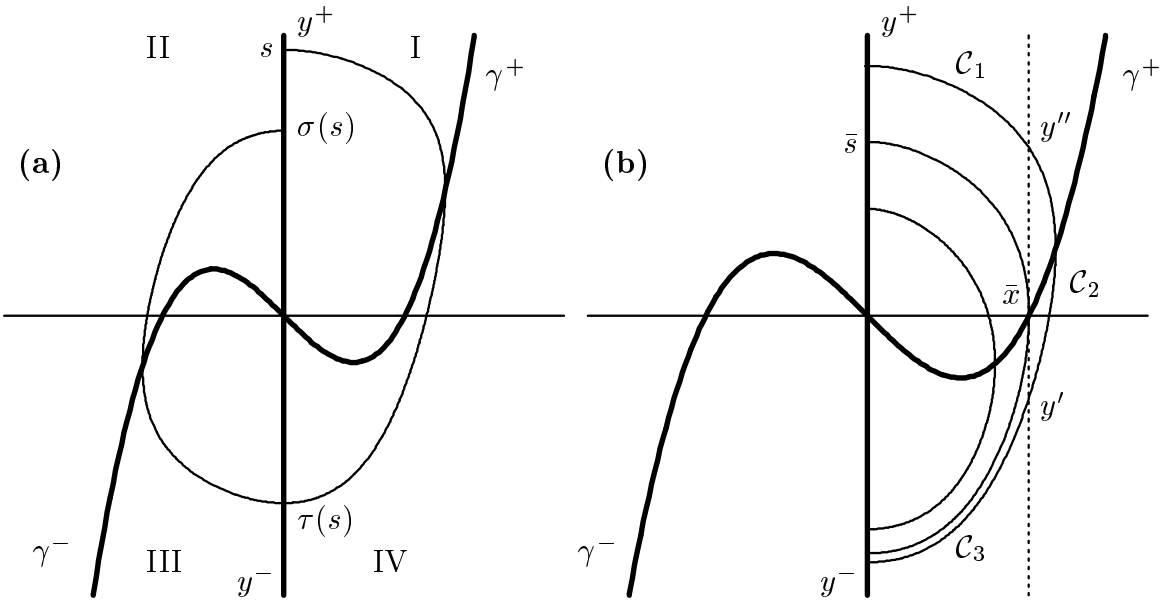


Fig. 1.35 (a) I quadranti e le mappe σ e τ. (b) Illustrazione del Lemma.

Se usiamo una variabile s per l'asse y^+, possiamo dire che σ è funzione continua di s, e monotona crescente (le orbite non si possono intersecare!); perciò vi sono, per ogni $s > 0$, tre sole possibilità:

i) $\sigma(s) = s$: in questo caso, evidentemente, l'orbita è periodica;

ii) $\sigma(s) > s$: allora risulta $s < \sigma(s) < \cdots < \sigma^n(s) < \cdots$, cioè l'orbita procede a spirale verso l'esterno;

iii) $\sigma(s) < s$: allora risulta $s > \sigma(s) > \cdots > \sigma^n(s) > \cdots$, e l'orbita procede a spirale verso l'interno.

Accanto alla mappa σ, corrispondente a un giro completo dell'orbita, è utile considerare una mappa τ corrispondente a mezzo giro: precisamente, se l'orbita di origine $(0,s) \in y^+$ taglia per la prima volta y^- in $(0,-s')$, $s' > 0$, poniamo $\tau(s) = s'$. La mappa τ è, come σ, continua e monotona crescente; inoltre, la simmetria delle equazioni mostra immediatamente che σ si ottiene componendo due volte τ, cioè $\sigma(s) = \tau(\tau(s))$.

- **Esercizio 1.18:** usando la simmetria delle equazioni per lo scambio $(x,y) \mapsto (-x,-y)$, si verifichi esplicitamente questa affermazione.

Le tre possibilità sopra riportate corrispondono allora rispettivamente a $\tau(s) = s$, $\tau(s) > s$, e $\tau(s) < s$.

Poniamo ora $\delta(s) = \frac{1}{2}(\tau(s)^2 - s^2)$. Per dimostrare che esiste una e una sola orbita periodica, è sufficiente mostrare che esiste uno e un solo valore $s_0 > 0$, tale che $\delta(s_0) = 0$. A tale scopo dimostreremo il seguente

Lemma 1.1: *Esiste un valore $\bar{s}$, tale che (a) $\delta(s) > 0$ per $0 < s \le \bar{s}$; (b) $\delta(s)$ è monotona strettamente decrescente per $s \ge \bar{s}$. Inoltre (c) $\delta(s)$ tende a $-\infty$ per $s \to +\infty$.*

Dimostrazione: per ogni $s > 0$, sia t_s il tempo al quale la traiettoria di origine $(0,s)$ taglia per la prima volta l'asse y^-; introduciamo la funzione $W(x,y) = \frac{1}{2}(\beta^{-2}x^2 + y^2)$, e osserviamo che risulta

$$\delta(s) = W(0, y_s(t_s)) - W(0,s) = \int_0^{t_s} \dot{W}(x_s(t), y_s(t))\,\mathrm{d}t\,,$$

ove $(x_s(t), y_s(t))$ indica la traiettoria di origine $(0,s)$. Dalle equazioni del moto (1.50) si ottiene subito $\dot{W} = \beta^{-2}x\dot{x} + y\dot{y} = -\beta^{-1}xf(x)$, e perciò

$$\delta(s) = -\beta^{-1}\int_0^{t_s} x_s(t) f(x_s(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Sia ora $\bar{s} > 0$ il punto di y^+ tale che l'orbita uscente da $(0,\bar{s})$ taglia l'asse x nel suo punto di intersezione con γ^+, che indichiamo con $(\bar{x},0)$ (si veda la Fig. 35b); per $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ risulta evidentemente $\bar{x} = \sqrt{3}$. E' chiaro che, se $s \le \bar{s}$, allora risulta $x_s(t) \le \bar{x}$, e corrispondentemente $f(x_s(t)) \le 0$, per $0 \le t \le t_s$ (l'uguaglianza è verificata, al più, per un valore solo di t). L'integrale perciò è positivo per $0 < s \le \bar{s}$, e questo basta per il punto (a).

Per il punto (b), la stima dell'integrale è poco più complicata: prendiamo una traiettoria uscente da $(0,s)$ con $s > \bar{s}$; dividiamola in tre parti $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$, a seconda che sia $x_s(t) < \bar{x}$, $x_s(t) \ge \bar{x}$, e poi ancora $x_s(t) < \bar{x}$ (Fig. 35b), e scriviamo

$$\delta(s) = \int_{\mathcal{C}_1} \dot{W}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathcal{C}_2} \dot{W}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathcal{C}_3} \dot{W}\,\mathrm{d}t\,.$$

Per il primo integrale è possibile sostituire x a t come variabile indipendente; usando $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}} = (y - f(x))^{-1}$ si trova subito

$$\int_{\mathcal{C}_1} \dot{W}\,\mathrm{d}t = -\beta^{-2}\int_0^{x_1} \frac{x\,f(x)}{\hat{y}_s(x) - f(x)}\mathrm{d}x\,,$$

ove si è indicata con $\hat{y}_s(x)$ la curva corrispondente alla traiettoria $(x_s(t), y_s(t))$. E' evidente, da questa espressione, che il contributo di $\mathcal{C}_1$ è positivo e decrescente al crescere di s (si osservi che $\hat{y}_s(x)$ per ogni x è crescente con s). In modo del tutto analogo si vede che anche il contributo di $\mathcal{C}_3$ è positivo (attenzione al verso di percorrenza di $\mathcal{C}_3$), e decrescente con s. Per il secondo integrale possiamo invece usare y come variabile indipendente, e osservando che $\dot{W}\,dt = \frac{\dot{W}}{\dot{y}}\,dy = f(x)\,dy$ possiamo scrivere

$$\int_{\mathcal{C}_2} \dot{W}\,\mathrm{d}t = -\int_{y'}^{y''} f(\hat{x}_s(y))\,\mathrm{d}y\,,$$

ove $\hat{x}_s(y)$ è la curva corrispondente alla traiettoria in esame, e gli estremi di integrazione sono ordinati in modo che sia $y'_s < y''_s$ (cioè in ordine opposto al verso di percorrenza; ciò spiega il segno meno). Si vede allora che il contributo di $\mathcal{C}_2$ è negativo, e crescente in modulo per s crescente: infatti, a fissato y, $\hat{x}_s(y)$ cresce con s (la traiettoria è più esterna), perciò anche f cresce, e inoltre il dominio di integrazione in y si allarga. Ciò basta per concludere che $\delta(s)$, per $s \geq \bar{s}$, è decrescente (strettamente), come asserito in (b). Infine, poiché al crescere di s la traiettoria si sposta verso destra a piacere (per tutti i punti di γ, con ascissa x comunque grande, passa una traiettoria che proviene da y^+ con s sufficientemente grande, e interseca l'asse delle ascisse a destra di x) è anche chiaro che $\delta(s) \to -\infty$ per $s \to +\infty$. Ciò completa la dimostrazione del lemma. *Q.E.D.*

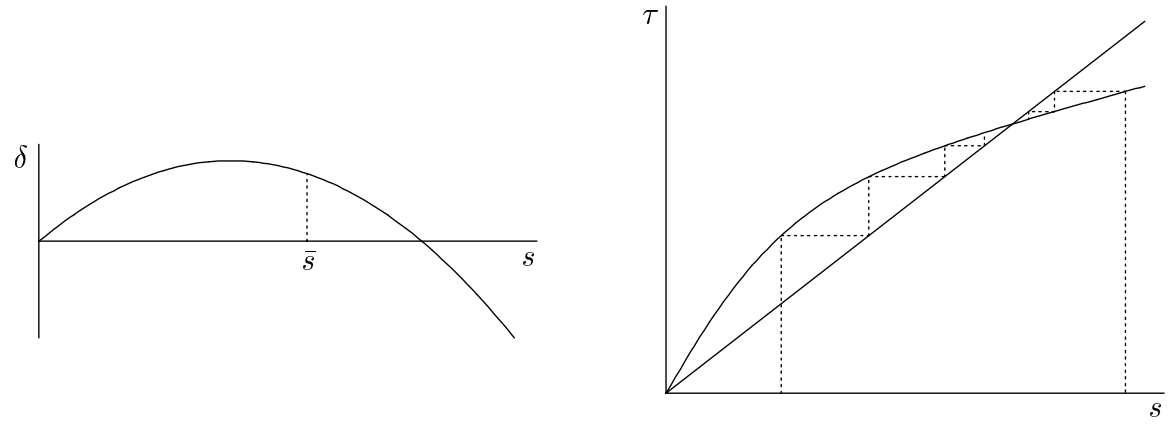


Fig. 1.36 *L'andamento di δ e di τ in funzione di s.*

Dal lemma si deduce all'istante che esiste un unico valore s^* in cui la funzione $\delta(x)$ si annulla, e dunque un'unica orbita periodica. Poche considerazioni in più mostrano poi che l'orbita così trovata è un ciclo limite attrattivo per l'intero piano di fase, cioè che qualunque altra orbita, comunque si prenda il dato iniziale (diverso dall'origine), converge ad essa per $t \to \infty$. E' chiaro infatti da quanto dimostrato che $\delta(s)$ ha l'andamento riportato in Fig. 36, parte sinistra (si osservi che $\delta(0) = 0$), e che corrispondentemente $\tau(s)$ ha l'andamento riportato nella stessa figira, parte destra; l'analisi grafica mostra allora come s_0 sia punto attrattivo per l'intera semiretta (e l'origine punto instabile). Una verifica formale è facile: ad esempio per $0 < s < s^*$ si

ha $\delta(s) > 0$, e dunque la successione $\sigma^k(s)$, superiormente limitata, è crescente; il suo limite è invariante (come segue dalla continuità di δ), e dunque coincide con s^*. In modo analogo si ragiona per $s > s^*$. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** Vale la pena di osservare che l'espressione precisa di $f(x)$ non è mai stata usata nella dimostrazione, che si basa interamente sulle proprietà qualitative di γ. Quali proprietà sono importanti?

La Fig. 38 illustra il comportamento del sistema (1.50) per alcuni valori di β.

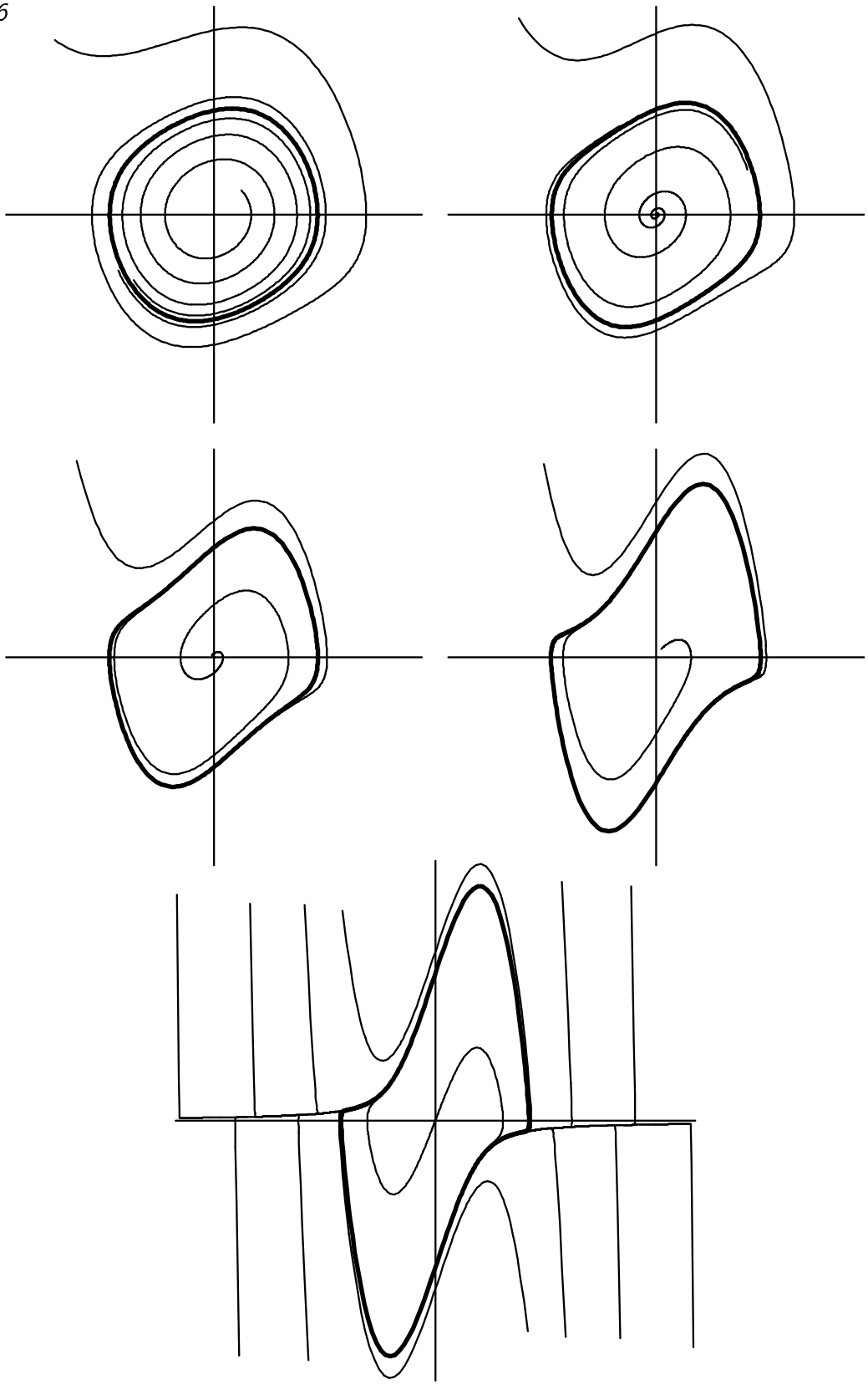


Fig. 1.38 *Il ritratto in fase del sistema (1.50) per* $\beta = 0.2,\ 0.4,\ 0.8,\ 1.6,\ 3.$

APPENDICE E

Introduzione ai moti caotici

Si sono studiati, in questo capitolo, i ritratti in fase di alcuni semplici sistemi dinamici conservativi, lineari o non lineari, descritti da una singola equazione differenziale autonoma del secondo ordine del tipo $\ddot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (oscillatore e repulsore armonico, pendolo...). Nel caso di sistemi esattamente lineari, lo studio si estende senza troppe difficoltà al caso di sistemi non autonomi (come si è visto per le oscillazioni forzate), o anche al caso di più equazioni accoppiate (come si vedrà in particolare più avanti, nel terzo capitolo, studiando il comportamento dei sistemi lagrangiani linearizzati attorno a una configurazionene di equilibrio). La situazione è invece sostanzialmente diversa per i sistemi non lineari: è infatti sufficiente considerare un'equazione non lineare elementare, come quella del pendolo, e aggiungervi un termine forzante, oppure considerare un sistema non lineare di due o più equazioni accoppiate, per ottenere moti qualitativamente diversi, in un certo senso irregolari e sostanzialmente più complicati, cui oggi si dà comunemente il nome di *moti caotici.*[75)]

L'equazione del moto del pendolo forzato, analoga a quella dell'oscillatore armonico forzato, è

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = C \cos \Omega t \ . \tag{1.61}$$

Tale equazione si potrebbe studiare in modo analitico, con risultati assai intererssanti: benché infatti non se ne sappia scrivere l'integrale generale,[76)] opportuni strumenti analitici conducono tuttavia a una comprensione qualitativa abbastanza completa della dinamica, almeno per C piccolo.[77)] Tale studio però risulta alquanto complicato, e decisamente fuori della portata di questa breve introduzione. Uno studio alternativo, un po' empirico ma ugualmente interessante, si può fare con metodi numerici: precisamente, preso un qualsiasi dato iniziale, si risolve numericamente (in modo approssimato!) l'equazione del moto (1.61), ricostruendo così l'orbita $x(t), v(t)$ nel piano di fase; per ciascuna orbita così ottenuta si mettono poi in evidenza, con artifici opportuni, le proprietà che si considerano significative.[78)]

[75)] Non esiste una vera nozione univoca di *sistema caotico*; esistono piuttosto diverse definizioni, mirate a mettere in evidenza diversi possibili "aspetti complicati" della dinamica. La nozione forse più generale e significativa si richiama all'instabilità delle orbite: orbite inizialmente vicine divergono rapidamente, a ritmo (mediamente) esponenziale. Tale idea si formalizza facendo riferimento ai cosiddetti *esponenti caratteristici,* o *esponenti di Ljapunov,* una delle nozioni di base della moderna *teoria ergodica.*

[76)] Tale incapacità è proprio dovuta alla presenza dei moti caotici.

[77)] Il metodo dell'*integrale di Melnikov* consente di mettere in evidenza la presenza di *punti omoclini,* e con essi di moti caotici, in un intorno della separatrice; il *teorema KAM* mostra invece l'esistenza di moti *ordinati* (in un senso che si potrebbe precisare) a distanza suficiente dalla separatrice.

[78)] Alla base di tale modo di procedere vi è uno spirito in un certo senso "sperimentale", complementare rispetto all'indagine analitica tradizionale. E' fuor di dubbio che tali "esperimenti numerici" – cominciati a metà degli anni '50, e condotti in modo massiccio dalla metà degli anni

Consideriamo dunque l'equazione (1.61) del pendolo forzato. Lo spazio adeguato, nel quale pensare immersa l'orbita, non è in realtà il piano xv, ma lo spazio allargato xvt: infatti, poiché nell'equazione del moto compare esplicitamente il tempo, è solo in tale spazio che un dato iniziale individua univocamente un'orbita.[79] Data la periodicità del termine forzante, è chiaro però che punti (x, v, t) e (x, v, t') danno luogo alla stessa orbita, e si possono identificare, se t e t' differiscono per un multiplo intero del periodo $\tau = 2\pi/\Omega$. Ci si può allora riportare nuovamente al piano xv, restringendo però l'osservazione a tempi discreti $t_k = k\tau$, $k \in \mathbb{Z}$;[80] ad ogni orbita resta allora associata in tale piano, che chiameremo piano Π, una successione discreta di punti (x_k, v_k), $k \in \mathbb{Z}$, avendo posto $x_k = x(k\tau)$, $v_k = v(k\tau)$. Detto in altri termini, la dinamica definisce naturalmente una mappa $\Phi : \Pi \to \Pi$, tale che sia $(x_{k+1}, v_{k+1}) = \Phi(x_k, v_k)$; Φ si può definire come la mappa che associa al generico punto $(x, v) \in \Pi$, inteso come dato iniziale (o dato al tempo $t = k\tau$, $k \in \mathbb{Z}$), il suo evoluto al tempo τ (ovvero al tempo $t = (k+1)\tau$; per la periodicità in τ dell'equazione, il valore di $k \in \mathbb{Z}$ è irrilevante). La mappa Φ contiene tutte le informazioni essenziali sulla dinamica, e si dice essere la *mappa di Poincaré* del sistema (analoga a quella già incontrata ad esempio nello studio del ciclo limite).

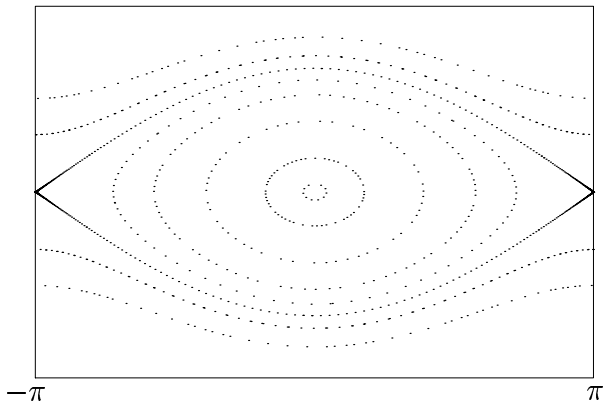


Fig. 1.39. *Mappa di Poincarè del pendolo forzato* $\omega = 1$, $\Omega = \sqrt{2}$, $C = 0$

Per acquistare familiarità con la mappa Φ, consideriamo innanzitutto il caso limite $C = 0$: in tal caso la forzante di fatto non esiste, e la mappa si riduce alla la mappa

'60 in poi – hanno avuto (pur tra innegabili abusi) un ruolo fondamentale nel progredire della teoria dei sistemi dinamici.

79) Alternativamente, in modo del tutto equivalente, ci si riporta al caso autonomo sostituendo alla (1.61) un sistema di *tre* equazioni differenziali autonome del primo ordine, ad esempio

$$\dot{x} = v \ , \qquad \dot{v} = -\omega^2 \sin x + C\cos\phi \ , \qquad \dot{\phi} = \Omega \ .$$

Procedendo in questo modo è evidente che lo spazio adeguato a descrivere i movimenti è tridimensionale.

80) Più in generale, si potrebbe prendere $t_k = k\tau + \bar{t}$, con $\bar{t}$ arbitrario; la scelta di $\bar{t}$ è del tutto irrilevante (corrisponde a "sezioni" diverse dello spazio tridimensionale).

al tempo τ del pendolo; tale mappa fornisce, ovviamente, il consueto ritratto in fase del pendolo (Fig. 39), con l'unica differenza che alle curve continue si sostituiscono successioni discrete di punti. Vale la pena di ricordare che l'aspetto qualitativo del ritratto in fase si spiega interamente facendo riferimento alla presenza di una costante del moto, precisamente l'energia $E(x,v) = \frac{1}{2}v^2 - \omega^2 \cos x$: i punti corrispondenti a una medesima orbita sono necessariamente "confinati" a una medesima curva di livello di E, che nel piano Π appare come una curva regolare.[81)]

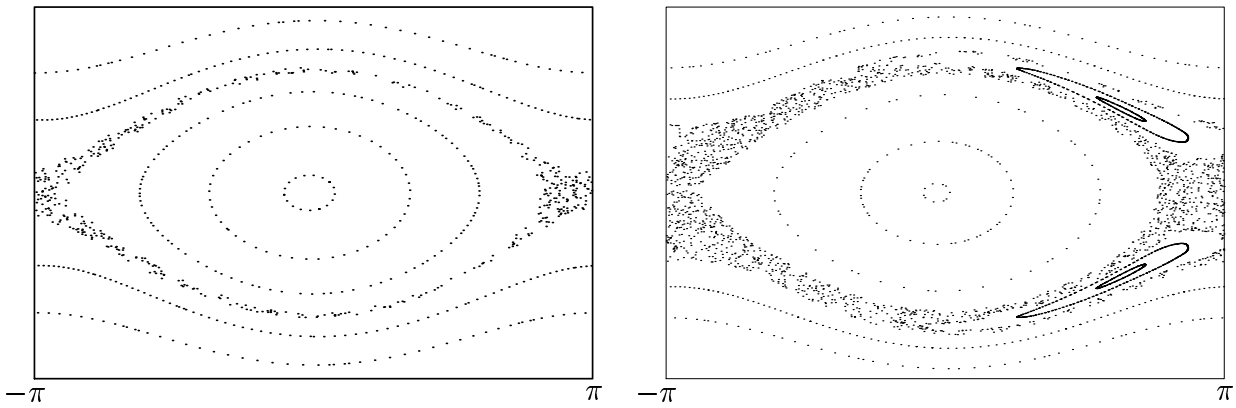


Fig. 1.40. *Mappa di Poincarè del pendolo forzato* $\omega = 1$, $\Omega = \sqrt{2}$, $C = 0.05$ *e* $C = 0.1$

Per valori di C diversi da zero, la situazione tuttavia cambia in modo significativo: come si può vedere dalla Fig. 40, che si riferise ai valori $C = 0.05$ e $C = 0.1$, per dati iniziali sufficientemente lontani dalla separatrice[82)] non si ha apparentemente nessun cambiamento rilevante; in effetti, punti appartenenti a una medesima orbita appaiono ancora allineati in curve, *come se vi fosse ancora una costante del moto, a dispetto del fatto che il sistema non è autonomo, e dunque l'energia non si conserva.* Dati iniziali in prossimità della separatrice danno luogo invece a un comportamento qualitativo assai diverso, in quanto i punti di una stessa orbita vanno a riempire non una curva, ma una regione bidimensionale, detta *regione caotica* (tutti i punti che appaiono nella regione caotica di ciascuna figura provengono da una singola orbita). Si potrebbe vedere che le orbite "invadono" tale regione in modo irregolare, a prima vista casuale, assai diverso dal modo regolare con cui i punti vanno invece a riempire le curve della *regione ordinata*.[83)]

[81)] Se il periodo $T = T(E)$ dell'orbita è commensurabile con il tempo τ della mappa, allora la successione di punti è finita (se $T/\tau = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$, dopo q iterazioni la successione si ripete), altrimenti la successione è infinita e, si potrebbe vedere, riempie densamente la curva di livello $E =$ cost. Poiché T dipende con continuità da E (e non è costante), quest'ultimo è il caso generico.

[82)] Dalla separatrice, si intende, del sistema libero, cioè corrispondente a $C = 0$.

[83)] E' insostituibile, per la comprensione di quanto si sta dicendo, mettersi davanti allo schermo di un calcolatore, e veder apparire i punti man mano che sono prodotti.

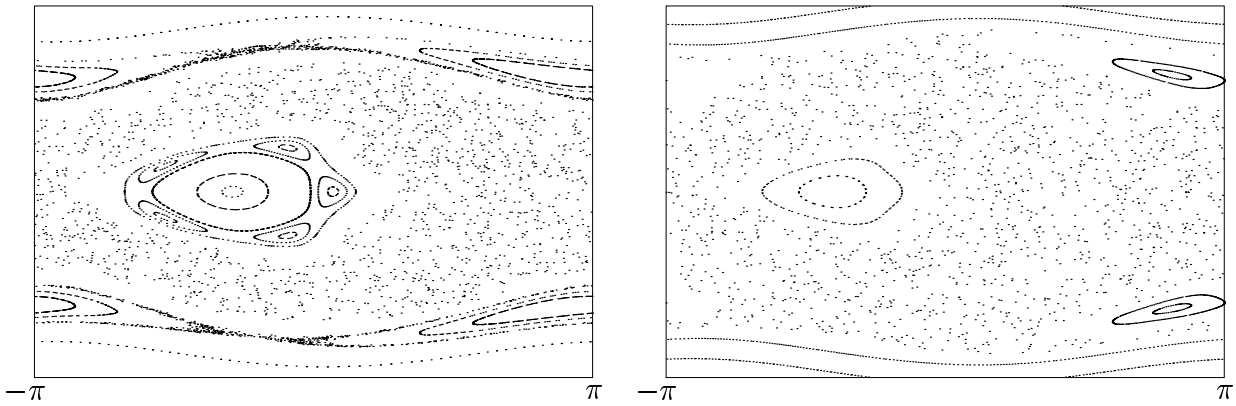


Fig. 1.41. *Mappa di Poincarè del pendolo forzato* $\omega = 1$, $\Omega = \sqrt{2}$, $C = 1$ *e* $C = 1.5$

Si può osservare che la regione caotica, al crescere di C, cresce in misura, e per grandi valori di C diviene preponderante (Fig. 41); la situazione però è piuttosto complicata: si vede infatti che anche all'interno della regione caotica esistono piccole "isole" di moti ordinati; analogamente, si potrebbe vedere, la regione ordinata non è veramente "piena", ma comprende *sottilissime* regioni caotiche, sparse tra una curva e l'altra, che con un po' di lavoro si riescono a mettere in evidenza. In tale situazione è difficile dire se vi sia o meno, nel sistema, una costante del moto (regolare e non banale): apparentemente, essa c'è e non c'è, a seconda del dato iniziale; detto in altri termini: nel piano Π, per C non troppo grande, vi è abbondanza di *curve invarianti*, che tuttavia non costituiscono una foliazione continua del piano.[84)]

[84)] Si potrebbe dimostrare (teorema KAM) che esiste un insieme di curve invarianti di misura di Lebesgue che tende a uno per $C \to 0$ (la misura del complementare è $\mathcal{O}(\sqrt{C})$); il complementare tuttavia risulta essere aperto e denso (si rifletta su questo punto). Tali curve invarianti si dimostrano essere curve di livello di una funzione regolare $\Pi \to \mathbb{R}$.