Esame di Analisi Matematica I - 9CFU - Chimica - 16-12-2024

1. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log\,(\,2+e^{x^2})\ \ (\,e^{\frac{\sqrt{2}}{x}} - \frac{\sqrt{2}}{x} - \cos(\frac{1}{x})\,)$

   [Per $x \to \infty$ la funzione $\log(2+e^{x^2})$ è asintoticamente equivalente alla funzione $\log(e^{x^2}) = x^2$, e quindi è equivalente calcolare il
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\ (\,e^{\frac{\sqrt{2}}{x}} - \frac{\sqrt{2}}{x} - \cos(\frac{1}{x})\,)$.
   Per vederlo rigorosamente si può raccogliere e^{x^2} nell' argomento del logaritmo ottenendo $\lim_{x\to+\infty} \log(2+e^{x^2})\ \ (\,e^{\frac{\sqrt{2}}{x}} - \frac{\sqrt{2}}{x} - \cos(\frac{1}{x})\,) =$
   $= \lim_{x\to+\infty} \log(\,e^{x^2}(1+\frac{2}{e^{x^2}})\,)\ \ (\,e^{\frac{\sqrt{2}}{x}} - \frac{\sqrt{2}}{x} - \cos(\frac{1}{x})\,) =$
   $\lim_{x\to+\infty} [\,\log(\,e^{x^2}) + \log(1+\frac{2}{e^{x^2}})\,)\,]\ (\,e^{\frac{\sqrt{2}}{x}} - \frac{\sqrt{2}}{x} - \cos(\frac{1}{x})\,) =$
   $= \lim_{x\to+\infty}(\,x^2+0\,)\ (\,e^{\frac{\sqrt{2}}{x}} - \frac{\sqrt{2}}{x} - \cos(\frac{1}{x})\,)$.
   Usando gli sviluppi di Taylor (per $t \to 0$) $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ (con $t = \frac{\sqrt{2}}{x}$), $\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ (con $t = \frac{1}{x}$) diventa
   $\lim_{x\to+\infty} x^2\,(\,1 + \frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2}\frac{2}{x^2} - \frac{\sqrt{2}}{x} - 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})) =$
   $\lim_{x\to+\infty} x^2\,(\,\frac{3}{2}\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})\,) = \frac{3}{2}$.
   Il limite proposto vale quindi $\frac{3}{2}$.
   ]

2. Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{\tan(x)\ \ e^{-\ \tan(x)}}{\cos^2(x)} dx$

[Con la sostituzione $\tan(x) = t$, $\frac{1}{\cos^2(x)} dx = dt$, si ha che
$\int \frac{\tan(x)\, e^{-\ \tan(x)}}{\cos^2(x)} dx = \int\ t\, e^{-\,t}\, dt =$ (per parti)
$-t\, e^{-\,t} + \int e^{-\,t}\, dt = -t\, e^{-\,t} - e^{-\,t} + c$, quindi
$\int \frac{\tan(x)\ \ e^{-\ \tan(x)}}{\cos^2(x)} dx = -\ \tan(x)\ e^{-\tan(x)}\ -\ \ e^{-\tan(x)} + c$

3. Data la funzione $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ determinare: – insieme di definizione con limiti agli estremi – eventuali asintoti – intervalli di monotonia (con eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo) - convessità (con eventuali punti di flesso) – immagine. Tracciare poi il grafico.

[$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^-$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ as. vert. $x = 0$;
$f'(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$, f decrescente in $(-\infty, 0)\cup(0, \frac{1}{2})$, crescente in $(\frac{1}{2}, +\infty)$, min relativo in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}e^2)$;
$f''(x) = \frac{2x^2-2x+1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, f sempre convessa, $I = (0, +\infty)$.]

4. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' & = \frac{1+y^2}{1+x^2} \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

esplicitando il suo intervallo di definizione D e la sua l' immagine.

[Separando le variabili e integrando si ottiene
$\int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx$, cioè
$\arctan(y) = \arctan(x) + c$.
Dalla condizione iniziale si ha che $c = \frac{\pi}{4}$, e quindi la soluzione verifica
$\arctan(y) = \arctan(x) + \frac{\pi}{4}$ e quindi
$y = \tan\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{4} \right)$
L' insieme di definizione è $D = (-\infty, 1)$.
Essendo la funzione strettamente crescente gli estremi superiore e inferiore coincidono con i $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$, $\lim_{x\to1^-} y(x) = +\infty$, .
Quindi l' immagine è $(\tan(-\frac{\pi}{4}), +\infty) = (-1, +\infty)$.
]

5. Studiare in funzione del parametro a l' esistenza di soluzioni (e calcolarle quando esistono) del seguente sistema di 2 equazioni in 2 incognite

$$\begin{cases} a\,x & + & y & = & 1 \\ x & + & a\,y & = & a \end{cases}$$

[La matrice A dei coefficienti ha determinante $a^2 - 1$. Se $a^2 \neq 1$, cioè $a \neq \pm 1$, il determinante è diverso da zero e quindi esiste un'unica soluzione, che può essere calcolata con la regola di Cramer ed è $x = 0$, $y = 1$. Se $a = -1$ la matrice dei coefficienti e la matrice aumentata $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ hanno entrambe rango 1 ed esistono ∞^1 soluzioni $x = t$, $y = 1 + t$, $t \in \mathbb{R}$. Se $a = 1$ la matrice dei coefficienti e la matrice aumentata $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ hanno entrambe rango 1 ed esistono ∞^1 soluzioni $x = t$, $y = 1 - t$, $t \in \mathbb{R}$.
]

6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -3 \end{pmatrix}$ trovare il valore del parametro a tale che $\lambda = -1$ sia autovalore della matrice. Per tale valore trovare autovalori ed autovettori e dire se la matrice è diagonalizzabile.

[Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(-3-\lambda) - a = \lambda^2 + 2\lambda - 3 - a$. Se si vuole che $\lambda = -1$ sia autovalore sostituendo tale valore a λ nel polinomio caratteristico si deve ottenere zero, quindi $1 - 2 - 3 - a = 0$, cioè $a = -4$.
La matrice è dunque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ e il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$.
L' unico autovalore è quindi $\lambda = -1$, con molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica solo 1, quindi la matrice non è diagonalizzabile. Infatti l' autospazio dell' autovalore $\lambda = -1$ è dato dal sottospazio di dimensione uno (cioè dai multipli di un solo vettore fissato) $t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$]