

Tema d'esame per Chimica

Preappello 16/12/2024

5) Studiare $\forall a \in \mathbb{R}$ le soluzioni di

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = a \end{cases}$$

lo traduciamo nella forma $A\underline{x} = \underline{b}$ con $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ incognito,
 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ e $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.

$$\text{Calcoliamo } \det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

$$\Rightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1. \Rightarrow \det(A) \neq 0 \text{ se } a \notin \{1, -1\}$$

se $a \neq 1, -1$ si ha che la soluz. $\exists!$, che determiniamo come

segue:
$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ -ax - a^2y = -a^2 \end{cases} \xrightarrow[\text{membri a membro}]{\text{sommando}} \Rightarrow (1 - a^2)y = 1 - a^2$$

abbiamo utilizzato l'assunzione $1 - a^2 \neq 0$.

$$y = \frac{1 - a^2}{1 - a^2} = 1$$

• Trattiamo a parte il caso $a = 1$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 1 - x, \text{ cioè in forma parametrica } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}$$

• Trattiamo a parte il caso $a = -1$

$$\text{rank}(A) = \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1; \text{rank}(A|\underline{b}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

Dal th. di Rouché-Capelli le soluz. sono ∞^1 , le quali sono $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \end{cases}$

Es. 6

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -3 \end{pmatrix}$? = a t.c. $\lambda = -1$ sia autovalore di A
? = per tale a , trovare autovalori, autovettori
e dire se A è diagonalizzabile.

Calcoliamo $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ a & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - a$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 - a$$

Imponiamo che $P(-1) = 0 \Rightarrow 1 + 2 \cdot (-1) - 3 - a = 0 \Rightarrow -4 - a = 0$

$$\Rightarrow \boxed{a = -4} \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 - (-4) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = 0 \text{ se } \boxed{\lambda_{1,2} = -1}$$

Risoliamo ora l'eq. agli autovettori per l'unico autovalore $\lambda = -1$;

cioè $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x+y = -x \\ -4x-3y = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ -4x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x \\ \cancel{-4x-2(-2x)=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-2t \end{cases}$$

$\underline{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ La matrice A non è diagonalizzabile perché $\lambda = -1$ ha moltep. algebrica = 2, che è maggiore della moltep. geom. = 1.

1) Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(2+e^{x^2}) \cdot \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{x}} - \frac{\sqrt{2}}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

Osserviamo che per $x \rightarrow +\infty$, $\log(2+e^{x^2}) = \log\left(e^{x^2} \left(1 + \frac{2}{e^{x^2}}\right)\right) =$
 $= \log e^{x^2} + \log\left(1 + \frac{2}{e^{x^2}}\right) \sim x^2$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(2+e^{x^2}) \cdot \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{x}} - \frac{\sqrt{2}}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{x}} - \frac{\sqrt{2}}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}},$

Ponendo $y = 1/x$, si ha che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{2}/x} - \sqrt{2}/x - \cos(1/x)}{1/x^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{2}y} - \sqrt{2}y - \cos(y)}{y^2}$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} e^{\sqrt{2}y} - \sqrt{2} + \sin(y)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} e^{\sqrt{2}y} - 0 + \cos(y)}{2} = \frac{3}{2}$$

2) Calcolare $\int \frac{\tan(x) e^{-\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx$.

Poniamo $t = \tan(x) \Rightarrow dt = \tan'(x) \cdot dx = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' dx$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{(\cos(x))^2} dx = \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\tan(x) e^{-\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx = \int \underbrace{t}_{f(t)} \underbrace{e^{-t}}_{g'(t)} dt = -t e^{-t} + \int dt \cdot 1 \cdot e^{-t} = -t e^{-t} - e^{-t}$$

$f(t) g'(t) \Rightarrow f(t) = -e^{-t}$

$$\Rightarrow \int \frac{\tan(x) e^{-\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx = -(\tan(x) - 1) e^{-\tan(x)}$$

— 0 —

3) Studio della funzione $f(x) = x^2 e^{1/x}$

— 0 —

① Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

② Simmetrie: $f(-x) = x^2 e^{-1/x} \Rightarrow$ no parità e no periodicità

③ Limiti alla frontiera

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^+$$

④ Ricerca degli zeri: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 e^{1/x} = 0 \nexists$ soluzioni (perché $0 \notin D$)

⑤ Asintoti obliqui ~~?~~ perché per $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \sim x^2$

⑥ Studio della derivata

$$f'(x) = 2x e^{\frac{1}{x}} - \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = (2x - 1) e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ per } 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

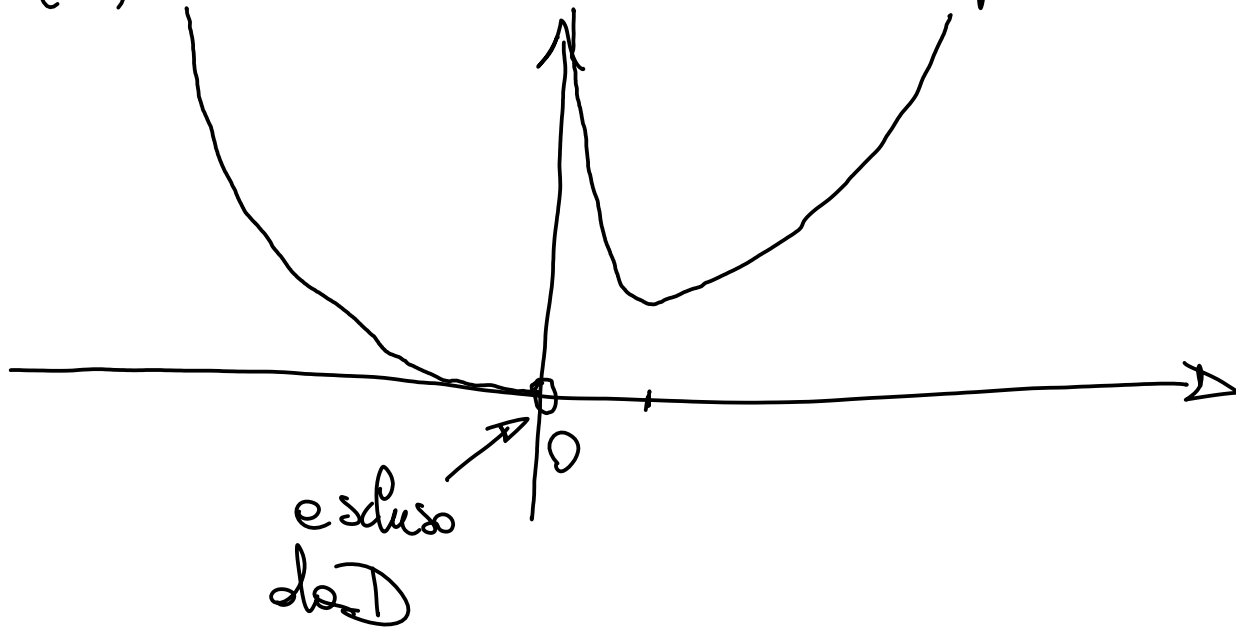
$$f'(x) \underset{<}{\geq} 0 \text{ studiamo } (2x - 1) e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f$ monotona crescente per $x > \frac{1}{2}$
" " decrescente per $x < \frac{1}{2}$ -

⑦ Studio della derivata seconda

$$f''(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}} + (2x - 1) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^2 + (x - 1)^2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$f''(x) > 0 \quad \forall x \in D$, cioè f è sempre convessa



4) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Determinare dominio
e immagine delle soluzioni

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \text{ per separazione di variabili,}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} + C \Rightarrow \arctan(y) = \arctan(x) + C$$

$$\text{Siccome } y(0) = 1 \Rightarrow \arctan(1) = \arctan(0) + C$$

$$\Rightarrow C = \pi/4$$

la soluz. è

$$y(x) = \tan\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{il cui dominio è } \left(-\infty, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{L'immagine è } \mathcal{I}_m = \left\{ \tan(\xi) \mid \xi \in \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \right\} = (-1, +\infty).$$