

Teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinché
una matrice A di tipo $n \times n$ sia diagonalizzabile è
che $\exists n$ autovettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ (quindi $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.c.
 $A \underline{v}_j = \lambda_j \underline{v}_j \quad \forall j = 1, \dots, n$) i quali formano una base di $\mathbb{R}^n$;
in particolare si ha che $S^{-1} A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con
 $S = (\underline{v}_1 | \dots | \underline{v}_n)$

Esempio 6.3: studiare la diagonalizzabilità di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (2-\lambda)$$

Per determinare gli autovalori, dobbiamo risolvere l'equazione

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2}$$

Determiniamo gli autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ c. $A\underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1$, $A\underline{v}_2 = \lambda_2 \underline{v}_2$

• Caso $\lambda_1 = 1$, poniamo $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, imponiamo allora

$$\text{che } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y = x \\ 2y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Scegliamo ad esempio $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (cioè corrisp. a $t=1$).

• Caso $\lambda_2 = 2$, poniamo $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e imponiamo che

$$(A - 2I)\underline{v}_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \forall t \in \mathbb{R}$, scegliamo $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (abbiamo posto $t=1$)

Si come $\alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = 0$, allora

gli autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2$ formano una base di $\mathbb{R}^2 \Rightarrow A$ è diagonalizzabile

In particolare, per il teorema (di cui sopra) deve essere vero che

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ con } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Facciamo il check:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra, possiamo scrivere il polinomio caratteristico nella forma (si parla di A di tipo $n \times n$)

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdot (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdot \dots \cdot (\lambda_i - \lambda)^{m_i} \quad (m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i \in \mathbb{C}$ e $\lambda_j \neq \lambda_\ell \quad \forall 1 \leq j < \ell \leq i$ e $m_1 + m_2 + \dots + m_i = n$

Def.: diciamo che m_j è la molteplicità algebrica di λ_j

Def.: diciamo che la molteplicità geometrica di un autovalore λ_j è $\mu_j = \dim(\text{Ker}(A - \lambda_j I_n)) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Teorema: $\forall$ matrice A di tipo $n \times n$ (fatta di coef. reali), si ha che la molteplicità geometrica di un autovalore λ_j è $\leq$ della sua molteplicità algebrica (cioè $\mu_j \leq m_j$); inoltre, A è diagonalizzabile sse tutti i suoi autovalori sono reali e $\forall \lambda_j$ autovalore (con $j = 1, \dots, i$) si ha che $\mu_j = m_j$.

Corollario: Se gli n autovalori di una matrice A di tipo $n \times n$ sono tutti distinti, allora A è diagonalizzabile.

Def: Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ e sia $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ la sua

trasposta, allora diciamo che A è simmetrica quando $A = A^T$

Def.: diciamo che una matrice U è ortogonale quando

$$U \cdot U^T = U^T U = \mathbb{I}_n \quad (\Rightarrow |U| \cdot |U^T| = 1 \Rightarrow |U|^2 = 1 \Rightarrow \det(U) = \pm 1)$$

Teorema: Sia A di tipo $n \times n$ (a coef. reali) e simmetrica (cioè $A^T = A$) allora A è diagonalizzabile tramite una matrice U ortogonale (cioè $U^T U = \mathbb{I}$), ovvero

$$U^T A U = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

dove gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono reali.

Esame Sett. 2025; punto C dell'es. 5

Si studi il sistema $A_t \underline{x} = b_t$ dove $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$$A_t = \begin{pmatrix} t & t & t-1 \\ t & t & 0 \\ 0 & 1-t & t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b_t = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ -2t \end{pmatrix}.$$

[C] per l'unico valore di t per cui $A_t = A_t^T$, si determinino tutti gli autovalori e per almeno uno degli autaval. si calcoli il corrisp. autovettore.

$$A_t = A_t^T = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ t & t & 1-t \\ t-1 & 0 & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t-1=0 \\ 1-t=0 \end{cases} \Rightarrow t=1.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot [(-1-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda) \cdot [\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1]$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = (1-\lambda) \cdot \lambda \cdot (\lambda-2) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 1 \\ \searrow \lambda = 0 \\ \nearrow \lambda = 2 \end{matrix}$$

Seppiamo $\lambda_1 = 1$, cerchiamo $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ t.c. $A_1 \underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=x \\ x+y=y \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Seppiamo $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ -