

Esame Settim. 2025; es. 4 (05?!)

Si studi il sistema $A_t \underline{x} = \underline{b}_t$ dove $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$$A_t = \begin{pmatrix} t & t & t-1 \\ t & t & 0 \\ 0 & 1-t & t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b}_t = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Discutere $[A]$ per quali valori di t il sistema di equazioni è $[A]$ determinato, $[A]$ impossibile, $[A]$ indeterminato; $[B]$ si determinino tutte le possibili soluzioni del caso $[A]$ e anche quando $t = -1$.

Autovalori e autovettori

Sia A una matrice $n \times n$, studiamo il sistema di eq. differenziali del tipo

$$\dot{\underline{y}} = A \underline{y} \quad \text{dove } \underline{y} = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \text{ è}$$

il vettore di funzioni incognite.

Supponiamo che $\exists$ una matrice $n \times n$ S t.c. $\underline{y} = S \underline{x}$ con $\underline{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ un vettore insieme di n funzioni incognite; inoltre sia S invertibile (quindi deve essere $|S| \neq 0$)

$$\text{t.c. } \frac{d}{dt}(S \underline{x}) = S \dot{\underline{x}} = A S \underline{x} \Rightarrow \dot{\underline{x}} = S^{-1} A S \underline{x} \quad \text{con } S^{-1} A S = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$$

cioè $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & c_n \end{pmatrix}$

Allora si ha che $\underline{\dot{x}} = S^{-1}AS \underline{x} = \text{diag}(c_1, \dots, c_n) \underline{x}$, cioè

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = c_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = c_2 x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = c_n x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1(0) e^{c_1 t} \\ x_2 = x_2(0) e^{c_2 t} \\ \vdots \\ x_n = x_n(0) e^{c_n t} \end{cases}$$

quindi, nelle variabili $\underline{x}$ abbiamo facilmente risolto il sist. di eq.; nelle variabili originali $\underline{y}$, la soluz. è $\underline{y} = S \underline{x}$

Quando il sist. di eq. diff. è del tipo $\underline{\dot{y}} = A \underline{y}$ con A matrice di tipo $n \times n$, procediamo allo stesso modo, cioè cerchiamo una matr. S t.c.

$$\frac{d^2}{dt^2}(S\underline{x}) = S\underline{\ddot{x}} = AS\underline{x} \Rightarrow \underline{\ddot{x}} = S^{-1}AS\underline{x} \text{ con } S^{-1}AS = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$$

in particolare se $c_1 = -\omega_1^2, \dots, c_n = -\omega_n^2$ abbiamo che

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n = -\omega_n^2 x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \vdots \\ x_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \end{cases}$$

Il prob. originale
è risolto da
 $\underline{y} = S\underline{x}$.

Questo procedimento può essere utile anche per risolvere $A\underline{y} = \underline{b}$, perché se $\exists S$ t.c. $S^{-1}AS = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ allora $AS\underline{x} = S\underline{\tilde{b}}$ (con $\underline{\tilde{b}}$ t.c. $\underline{\tilde{b}} = S^{-1}\underline{b}$) $\Rightarrow S^{-1}AS\underline{x} = \underline{\tilde{b}}$, quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} c_1 x_1 = \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ c_n x_n = \tilde{b}_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 / c_1 \\ \vdots \\ x_n = \tilde{b}_n / c_n \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{quindi il problema} \\ \text{iniziale è risolto} \\ \text{da } \underline{y} = S\underline{x} . \end{array}$$

— 0 —

Def.: Sia A una matrice di tipo $n \times n$ diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un suo autovalore e $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ il corrispondente autovettore quando $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$

Osservazione: se $\underline{v}$ è un autovettore per A corrisp. all'autovalore λ allora

$$\text{da } A\underline{v} = \lambda \underline{v} \Rightarrow A\underline{v} - \lambda \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow A\underline{v} - \lambda \mathbb{I}_n \underline{v} = (A - \lambda \mathbb{I}_n) \underline{v} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{v} \text{ (che è } \neq \underline{0} \text{)} \in \text{Ker}(A - \lambda \mathbb{I}_n) \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}_n) = 0,$$

Cioè
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ dove } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

Siccome
$$|A - \lambda \mathbb{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

è un polinomio a coeff. reali di grado n
 in λ abbiamo un'eq. del tipo $\sum_{j=0}^n d_j \lambda^j = 0$
 con $d_j \in \mathbb{R} \forall j=0, \dots, n$ che ammette n soluzioni
 in $\mathbb{C}$.

Si indica con $P_n(\lambda)$

si dice polinomio caratteristico della matrice A

Esempio 6.1

? = autovalori e autovettori di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A , cioè

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} - 0 + (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda - 1 + (1-\lambda) \cdot ((-\lambda) \cdot (1-\lambda) - 1) =$$

$$= \lambda - 1 + (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 1) = -(1-\lambda) + (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 1) =$$

$$= (1-\lambda) (\lambda^2 - \lambda - 2)$$

Dobbiamo risolvere $P(\lambda) = 0 \Rightarrow (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$, le altre 2 soluzioni sono date da

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Determiniamo $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ t.c. $A \underline{v}_j = \lambda_j \underline{v}_j$.

Caso $\lambda_1 = 1$, scriviamo $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} y+z=x \\ x+y=y \\ x+z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ scegliamo ad esempio

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Caso $\lambda_2 = 2$, cioè cerchiamo $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ t.c. $(A - \lambda_2 I) \underline{v}_2 = \underline{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2x + y + z} = 0 \\ y = x \\ z = x \end{cases} \quad 0=0$$

$$\Rightarrow \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Scegliamo } \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Caso $\lambda_3 = -1$, cioè cerchiamo $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ t.c. $(A - \lambda_3 I) \underline{v}_3 = \underline{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x + y + z} = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x + y + z} = 0 \\ y = -\frac{x}{2} \\ z = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} t \\ -t/2 \\ -t/2 \end{pmatrix} \forall t \in \mathbb{R}, \text{ scegliamo } \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

— o —

Teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice A di tipo $n \times n$ sia diagonalizzabile è che $\exists n$ autovettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ (quindi $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.c. $A\underline{v}_j = \lambda_j \underline{v}_j \forall j=1, \dots, n$) i quali formano una base di $\mathbb{R}^n$; in particolare si ha che $S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con $S = (\underline{v}_1 | \dots | \underline{v}_n)$