

Esempio 5.8

Risolvere
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + 8y + 10z = 3 \\ 2x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{b} \quad \text{dove } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(A) \geq 1 \text{ poiché } |1| \neq 0$$

$$\text{rank}(A) \geq 2, \text{ poiché } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (1) \cdot (-2) - 1 \cdot 2 = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$\text{Siccome } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{vedi sotto}), \text{ allora}$$

$$\text{rank}(A) = 2.$$

Osservazione: $(A | \underline{b})$ ha non più di 2 righe indipendenti;

Perché in $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & 3 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ si vede subito che la 4^a riga è la somma della 1^a e della 2^a riga (cioè $(1, 2, 3, 1) + (1, -2, -1, 0) = (2, 0, 2, 1)$)

Inoltre, la 3^a riga si ottiene moltiplicando per 3 la 1^a riga e sottraendo la 2^a (cioè $3 \cdot (1, 2, 3, 1) - (1, -2, -1, 0) = (2, 8, 10, 3)$)
 $\Rightarrow$ le righe indipendenti di $(A | \underline{b})$ sono al più due

$\Rightarrow \text{rank}(A | \underline{b}) \leq 2$, ma siccome $\text{rank}(A) = 2$

$\Rightarrow \underline{\text{rank}(A) = \text{rank}(A | \underline{b}) = 2}$

$\Rightarrow$ ∞ soluzioni perché $\uparrow$ e le soluzioni saranno $\infty^{3-2} = \infty^1$

Possiamo quindi limitarci a studiare

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1-3z \\ x-2y=z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\cancel{x+2y}) + (\cancel{x-2y}) = (1-3z) + z \\ (\cancel{x+2y}) - (\cancel{x-2y}) = (1-3z) - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1-2z \\ 4y = 1-4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - z \\ y = \frac{1}{4} - z \end{cases}$$

la soluz. è data da $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - t \\ y = \frac{1}{4} - t \\ z = t \end{cases}$ coerentemente con l'osservazione che il sistema ammette ∞^1 soluzioni

Es. 5.9

Come nel 5.8 a parte i coef. noti ora sostituiti dal vett. $(0,0,1,0)^T$.
Si tratta quindi di risolvere

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x-2y-z=0 \\ 2x+8y+10z=1 \\ 2x+2z=0 \end{cases} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{b} \quad \text{dove } \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dall'es. precedente sappiamo che

$\text{rank}(A) = 2$, ci chiediamo: quanto vale $\text{rank}(A|\underline{b})$?

Calcoliamo $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$

$\Rightarrow \text{rank}(A|\underline{b}) = 3 > \text{rank}(A) = 2$, quindi il sist. è impossibile.

Osservazione:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x-2y-z=0 \\ 2x+8y+10z=1 \end{cases}$$

Se (come prima)
 Sottraggo la 2^a eq.
 dal triplo della 1^a eq.

otteniamo $3 \cdot (x+2y+3z) - (x-2y-z) = 3 \cdot 0 - 0 = 0$

$$\Rightarrow 2x+8y+10z=0$$

ma dalla 3^a eq $\Rightarrow 2x+8y+10z=1$ } impossibile!

Esercizio 47

1) Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ calcolare $\text{rank} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ a & a & a \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$

2) Trovare poi tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ x + y + z = 1 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

Per determinare $\text{rank} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ a & a & a \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ cominceremo a calcolare $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ b & a \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{vmatrix} + 0 = a(a^2 - ab) - b \cdot a^2 \\ = a^3 - 2a^2b = a^2 \cdot (a - 2b)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a^2 \cdot (a - 2b) = 0 \text{ quando } a = 0, a = 2b$$

Se $a \neq 0$ e $a \neq 2b$, allora $\text{rank} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ a & a & a \\ 0 & b & a \end{pmatrix} = 3$.

• Caso $a = 0$ e $a = 2b$, allora

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

• Caso $a=0$ e $a \neq 2b$ (cioè $b \neq 0$), allora

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = 1$$

• Caso $a \neq 0$ e $a = 2b$ (cioè $b = a/2$), allora

$$? \text{ rank} \begin{pmatrix} a & a/2 & 0 \\ a & a & a \\ 0 & a/2 & a \end{pmatrix} = 2$$

$\text{rank} \geq 1$ poiché $a \neq 0$

$$\rightarrow \text{poiché } \begin{vmatrix} a & a/2 \\ a & a \end{vmatrix} = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} \neq 0$$

- Studiamo $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ x + y + z = 1 \\ \frac{1}{2}y + z = 1 \end{cases}$
ovvero il sistema

Osservo che è un sistema della forma
 $A\underline{x} = \underline{b}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ cioè

$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ a & a & a \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ con $a=1$ e $b=1/2$, cioè siamo nel caso $a \neq 0$ e $a=2b$
 per cui $\text{rank}(A)=2$. Dobbiamo studiare $\text{rank}(A|\underline{b})$

$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ poiché la quarta (e unica) colonna è uguale alla terza.

Risolviamo

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ x + y + z = 1 \\ \frac{1}{2}y + z = 1 \end{cases}$$
 Oss. se sommiamo la 1^a e la 3^a eq. otteniamo

$$(x + \frac{1}{2}y) + (\frac{1}{2}y + z) = 0 + 1 \Rightarrow x + y + z = 1$$

Studiamo $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 1 + x \end{cases}$
 Il sistema è risolto da $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Agosto 2024, es. n. 6

Studiare $\begin{cases} kx + z = 2 \\ x + ky + kz = 2k \\ kx + ky + z = 2k \end{cases}$ Discutere per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema è (A) determinato, (B) impossibile, (C) indeterminato (e in questo caso si scrivano le soluzioni).

Il sistema è nella forma $A\underline{x} = \underline{b}$ con $\underline{x} = (x, y, z)^T$,

$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$ e $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix}$. Studiamo $\text{rank}(A)$, quindi calcoliamo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & k \\ k & k & 1 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} k & k \\ k & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & k \end{vmatrix} = k \cdot (k - k^2) + k - k^2$$
$$= \cancel{k^2} - k^3 + k - \cancel{k^2} = k(-k^2 + 1) = -k \cdot (k^2 - 1)$$

$\Rightarrow |A| = 0$ quando $k \cdot (k^2 - 1) = 0$, cioè $k = 0$, $k = 1$, $k = -1$.

Ris. a (A): il sistema è determinato quando $k \neq 0$ e $k \neq 1$
e $k \neq -1$ (oppure $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$)

• Caso $k=0$ il sist. $A\underline{x} = \underline{b}$ diventa

$$\begin{cases} z=2 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \text{ Impossibile} \quad \text{siamo nel caso (B)}$$

$$\begin{aligned} \text{• Caso } k=1 \quad & \begin{cases} x+z=2 \\ x+y+z=2 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+z) - (x+y+z) = 2-2 \Rightarrow y=0 \\ z=2-x \end{cases} \\ & \text{---} \end{aligned}$$

la soluzione $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=2-t \end{cases}$ il sistema è indeterminato
(siamo nel caso (C))

• Caso $k = -1$

$$\begin{cases} -x + z = 2 \\ x - y - z = -2 \\ -x - y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 + x \\ (\cancel{x} - y - \cancel{z}) + (-\cancel{x} - y + \cancel{z}) = -2 - 2 \Rightarrow y = 2 \\ -\cancel{x} - \cancel{z} + \cancel{z} + \cancel{x} = -2 \Rightarrow 0 = -2 \end{cases}$$

Ricadano in (B).

~~Il~~
Impossibile!