

Teorema: Sia $L: V \rightarrow W$ un operatore lineare,
 con V e W spazi vettoriali di dimensione n e m
 rispettivamente; sia A la matrice di tipo $m \times n$
 che è associata all'operatore L (una fissata base),
 allora: (1) $\dim(\text{Im}(L)) = \text{rank}(A)$
 (2) $\dim(\text{Ker}(L)) + \dim(\text{Im}(L)) = n$
 (cioè anche $\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = n$)

Osservazione: si ricordi che $\text{rank}(A) = \text{numero di righe di } A$
 lin. indipendenti = numero di colonne di A linearmente indipendenti

Teorema (di Rouché-Capelli): Sia $A \underline{x} = \underline{b}$ un sistema
 di m eq. in n incognite allora

• Il sistema ha soluzioni sse $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|\underline{b})$

matrice di
 tipo $m \times (n+1)$ con
 le prime n colonne
 $\underline{b}$ nell'ultima colonna

- Se $\exists$ soluzioni, ne esiste una sola quando $\text{rank}(A) = n$;
se invece $r = \text{rank}(A) < n$ allora $\exists \infty^{n-r}$ soluzioni.

Procedura generale per risolvere un sistema del tipo $A\underline{x} = \underline{b}$ con A matrice di tipo $m \times n$, quindi $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ (con $\underline{x}$ incognito) e $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$.

- Si calcolino $\text{rank}(A)$ e quello di $\text{rank}(A|b)$
 - Se $\text{rank}(A) < \text{rank}(A|b)$ allora $\nexists$ soluzioni (il sistema è impossibile)
 - Se invece $r = \text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$ allora individuiamo una sottomatrice $r \times r$ di A t.c. il suo $\det \neq 0$, quindi escludiamo tutte le $m - r$ equazioni rimanenti (perché

sono ridondanti). Inoltre, portiamo le $n-2$ variabili incognite che non appartengono al minore diverso da zero a destra del segno di uguale;
infine risolviamo il sistema di 2 eq. e 2 incognite che ritroviamo a sinistra del segno di uguale
 $\Rightarrow$ abbiamo espresso 2 incognite in funzione delle $n-2$ rimanenti (queste espressioni sono le soluzioni) -

Applicheremo la "ricetta" qui sopra alla soluzione delle eq. nel caso dell'esempio 5.8

Esercizio 40: Sia $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentato dalla
matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. $? = \dim(\text{Ker}(L))$ $? \dim(\text{Im}(L))$

Per rispondere, basta calcolare $\text{rank}(A)$

$\text{rank}(A) \geq 1$ perché ad esempio $|2| \neq 0$

$\text{rank}(A) \geq 2$ perché $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 2 \neq 0$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 = -3 + 1 + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A) = 2 \Rightarrow \dim(\text{Im}(A)) = 2 \Rightarrow \dim(\text{Ker}(A)) = 3 - 2 = 1$$

(+) Caratterizzare nucleo e immagine di A .

$$\text{Ker}(A) : A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ 3x + y = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -2x \\ y = -3x \\ \cancel{-x + 3x - 2x = 0} \\ \quad \quad \quad 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -3t \\ -2t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(A) : \underline{w} \in \text{Im}(A) \text{ t.c. } \exists \underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{w}$$

$$\text{Pensiamo } A = (\underline{a}_1 \mid \underline{a}_2 \mid \underline{a}_3) \text{ e risolviamo che } A\underline{x} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\underline{a}_1 + y\underline{a}_2 + z\underline{a}_3$$

$$\Rightarrow \text{Im}(A) = \left\{ x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$\text{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2x+z \\ 3x+y \\ -x-y+z \end{pmatrix} \mid \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ s-t \end{pmatrix} \mid \forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ s-t \end{pmatrix} \mid \forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\text{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ t.c. } x_3 = x_1 - x_2 \right\} \Rightarrow \text{Im}(A) \text{ è formato dai } \text{vettori che stanno nel piano } x_3 = x_1 - x_2$$

Esempio 5.8

Risolvere
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + 8y + 10z = 3 \\ 2x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{b} \quad \text{dove } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(A) \geq 1 \text{ poiché } |1| \neq 0$$

$$\text{rank}(A) \geq 2, \text{ poiché } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (1) \cdot (-2) - 1 \cdot 2 = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$\text{Si come } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{vedi sotto}), \text{ allora}$$

$$\text{rank}(A) = 2.$$

Osservazione: $(A|b)$ ha non più di 2 righe indipendenti;

Perché in $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & 3 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ si vede subito che la 4^a riga è la somma della 1^a e della 2^a riga (cioè $(1, 2, 3, 1) + (1, -2, -1, 0) = (2, 0, 2, 1)$)

Inoltre, la 3^a riga si ottiene moltiplicando per 3 la 1^a riga e sottraendo la 2^a (cioè $3 \cdot (1, 2, 3, 1) - (1, -2, -1, 0) = (2, 8, 10, 3)$)
 $\Rightarrow$ le righe indipendenti di $(A|b)$ sono al più due

$\Rightarrow \text{rank}(A|b) \leq 2$, ma siccome $\text{rank}(A) = 2$

$\Rightarrow \underline{\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = 2}$

$\Rightarrow$ 3 soluzioni perché $\uparrow$ e le soluzioni saranno $\infty^{3-2} = \infty^1$