

Esempio 5.6: Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 12 \\ 4y - z = -7 \\ 5x + 8z = 34 \end{cases}, \text{ cioè } A\underline{x} = \underline{b} \text{ con } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } \underline{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 34 \end{pmatrix}$$
$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} - 0 + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 32 + 5 \cdot (-1 - 3 \cdot 4) = -1$$

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 3 \\ -7 & 4 & -1 \\ 34 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 34 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 0 + 8 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = 34 \cdot (-1 - 12) + 8 \cdot (48 + 7) = -442 + 440 = -2$$

$$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 3 \\ 0 & -7 & -1 \\ 5 & 34 & 8 \end{vmatrix} = 0 + (-7) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 5 & 34 \end{vmatrix} = -7 \cdot (16 - 15) + (68 - 60) = -7 + 8 = 1$$

$$\det(B_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & 36 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - 0 + 36 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-7 - 48) + 36 \cdot 8 = -275 + 272 = -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{|B_1|}{|A|} = 2 \\ y = |B_2|/|A| = -1 \\ z = |B_3|/|A| = 3 \end{cases}$$

Proviamo una soluzione alternativa

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 12 \\ 4y - z = -7 \\ 5x + 8z = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4y + 7 \\ z = \frac{36 - 5x}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{36 - 5x}{8} = 4y + 7$$

$$\Downarrow$$

$$36 - 5x = 32y + 56$$

$$\Rightarrow x = \frac{-22 - 32y}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot (-22 - 32y)}{5} + y + 3 \cdot (4y + 7) = 12$$

$$\Rightarrow -44 - 64y + 5y + 60y + 105 = 60$$

$$\Rightarrow y = 44 - 105 + 60 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-22 + 32}{5} = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \cdot (-1) + 7 = 3 \end{cases}$$

————— 0 —————

Osservazione: Sia A una matrice $n \times n$, che scriviamo come

$$A = (\underline{a}_1 | \underline{a}_2 | \dots | \underline{a}_n) \quad \text{dove } \underline{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \text{ è la } i\text{-esima colonna di } A,$$

$$\text{allora } A\underline{x} \text{ con } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow A\underline{x} = (x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n)$$

Oss. da Gauer sappiamo che se $\det(A) \neq 0$ allora l'unica soluzione è $A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = A^{-1} \underline{0} = \underline{0}$ cioè $\text{Ker}(A) = \{\underline{0}\}$

Oss.: Se invece $\det(A) = 0$, allora le colonne $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ che formano A sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \exists \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n = \underline{0}$ con $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$

$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ allora $A\underline{x} = x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n = x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{0}$
 cioè $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{x}$ è una soluz. non banale ($\neq \underline{0}$) di $A\underline{x} = \underline{0}$
 cioè $\in \text{Ker}(A)$

Inoltre, $\lambda \underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $A(\lambda \underline{x}) = \lambda x_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda x_n \underline{a}_n =$
 $= \lambda (x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n) = \underline{0}$

$\lambda \underline{x} \in \text{Ker}(A)$ cioè $A\underline{x} = \underline{0}$ ammette ∞ soluzioni

Osservazione: Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di n eq. in n incognite,
 con $\det(A) = 0$ e sia $\underline{w}$ t.c. $A\underline{w} = \underline{b}$ cioè $\underline{w}$ è una soluzione;
 inoltre sia $\underline{u} \in \text{Ker}(A)$ allora $A(\underline{w} + \underline{u}) = A\underline{w} + A\underline{u} = A\underline{w} + \underline{0} = \underline{b}$
 $\Rightarrow$ anche $\underline{w} + \underline{u}$ è una soluzione.

Proposizione: Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sist. di n eq. ed n incognite se $\det(A) = 0$

o $\neq$ soluzioni oppure ne esistono ∞ -

Def.: Sia $L: V \rightarrow W$ un operatore lineare tra 2 spazi vettoriali V e W (cioè $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $L(\underline{u}) \in W$ e $L(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) = \alpha L(\underline{u}) + \beta L(\underline{v})$), allora definiamo nucleo di L e immagine di L i 2 insiemi seguenti:
$$\text{Ker}(L) = \{ \underline{v} \in V : L(\underline{v}) = \underline{0} \} \quad \text{e} \quad \text{Im}(L) = \{ \underline{w} \in W : \exists \underline{u} \text{ t.c. } L(\underline{u}) = \underline{w} \}$$

Oss.: Sia $\text{Ker}(L)$ che $\text{Im}(L)$ sono sottosp. vettoriali.
risp. di V e W .

Verifica: Se $\underline{u}$ e $\underline{v} \in \text{Ker}(L)$ $\forall \alpha$ e $\beta \in \mathbb{R}$ allora
 $\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} \in \text{Ker}(L)$ cioè $L(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) = \alpha L(\underline{u}) + \beta L(\underline{v}) = \alpha \underline{0} + \beta \underline{0} = \underline{0}$

Ricordiamoci che a ogni op. lineare L è associata una
e una sola matrice A (di tipo $m \times n$, dove $n = \dim(V)$ e $m = \dim(W)$)
una volta fissata la base, quindi per determinare $\text{Ker}(L)$
studiamo $\text{Ker}(A)$ invece per l'immagine.

Teorema (di Rouché-Capelli): Sia $A \underline{x} = \underline{b}$ un sistema
di m eq. in n incognite allora

- $\exists$ soluzioni sse $\text{rank}(A) = \text{rank}\left(\overbrace{A \mid \underline{b}}^{\text{matrice di tipo } m \times (n+1) \text{ con } A \text{ nelle prime } n \text{ colonne e } \underline{b} \text{ nell'ultima colonna}}\right)$
- Se $\exists$ soluzioni esse sono ∞^k dove k è la dimensione di $\text{Ker}(A)$.