

Teorema: A di tipo $n \times n$ è invertibile se e solo se
 $\det(A) \neq 0$.

Teorema: Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ t.c. $\det(A) \neq 0$

allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

dove $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

il determinante della sotto-
matrice che si ottiene da A esclu-
dendo riga i -esima e colonna j -esima.

Esempio 4.12: Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $? = A^{-1}$

$$\det(A) = ad - bc \quad A_{11} = \cancel{(-1)^{1+1}} \cdot d, \quad A_{12} = \cancel{(-1)^{1+2}} c = -c$$

$$A_{21} = \cancel{(-1)^{2+1}} b = -b, \quad A_{22} = \cancel{(-1)^{2+2}} \cdot a$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & \overset{0}{db-bd} \\ \overset{0}{-ca+ac} & -cb+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 4.11:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$? = A^{-1}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot 2 = -2; \quad A_{11} = \cancel{(-1)^{1+1}} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = \cancel{(-1)^{1+2}} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = \cancel{(-1)^{1+3}} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = \cancel{(-1)^{2+1}} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{22} = \cancel{(-1)^{2+2}} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = \cancel{(-1)^{2+3}} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{31} = \cancel{(-1)^{3+1}} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{32} = \cancel{(-1)^{3+2}} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{33} = \cancel{(-1)^{3+3}} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 9 & -3 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione: Siano A e B t.c. $|A| \neq 0$ e $|B| \neq 0$,
 allora AB è invertibile ($|AB| = |A||B| \neq 0$); inoltre, note A^{-1} e B^{-1}
 allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Infatti,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

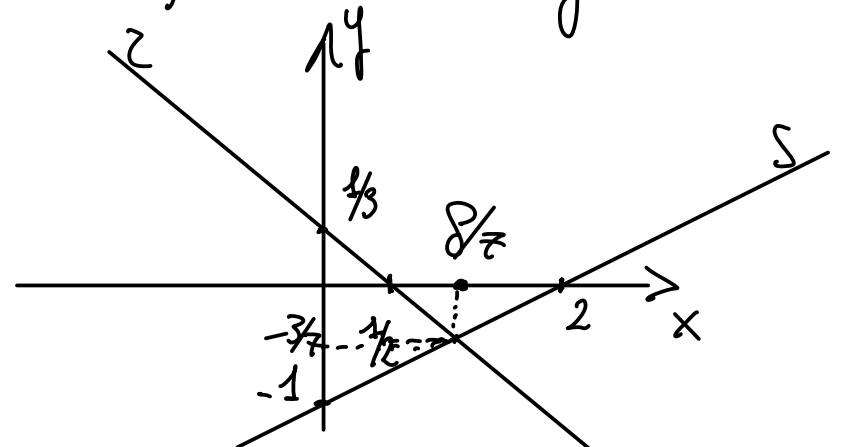
Sistemi di equazioni lineari

$$\begin{cases} 3x + 2y + 9z = 2 \\ 4y - 5z = 4 \\ 2x + 7y = 5 \end{cases}$$

← sistema a 3 eq. e 3 incognite

Esempio 5.2

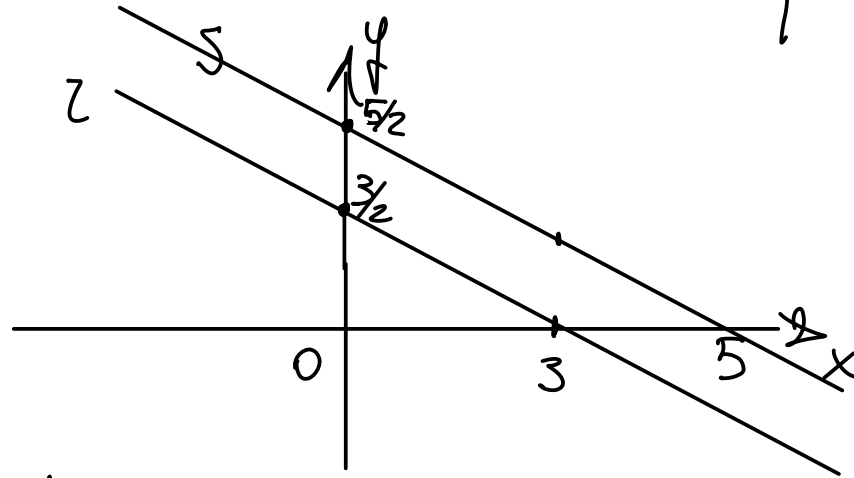
$$\begin{cases} y = -3/7 \\ x = 2 + 2y = 8/7 \end{cases} \quad \begin{cases} z \\ s \end{cases} \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$



Se la soluzione $\exists!$ si dice che il sistema di eq. è determinato

Esempio 5.3

$$\begin{cases} 2 & x+2y=3 \\ 5 & x+2y=5 \end{cases}$$



Osservo che possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

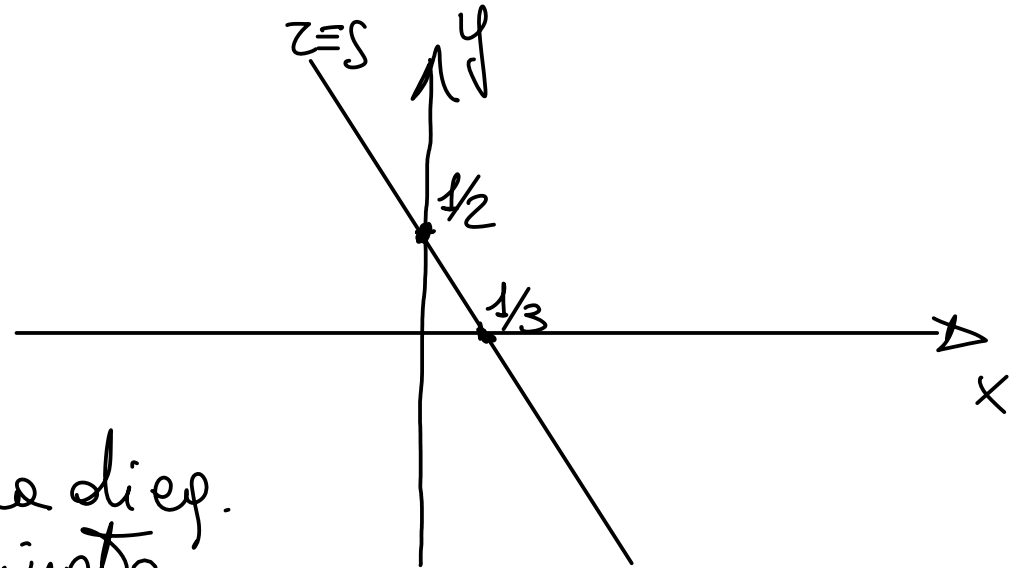
Quando $\nexists$ soluzioni si dice che il sistema è impossibile.

Esempio 5.4

$$\begin{cases} 2 & 3x+2y=1 \\ 5 & 6x+4y=2 \end{cases}$$

Quando $\exists$

∞ soluzioni si dice che il sistema di eq. lineari è indeterminato.



In generale rappresentiamo i sistemi di eq. lineari in forma prodotto matrice per vettore, cioè

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $x_1, \dots, x_n$ sono le incognite e $b_1, \dots, b_m$ sono i termini noti

Osservazione: se $m=n$ (cioè tante eq. quante incognite) e il $\det(A) \neq 0$, allora $\underline{A}\underline{x}=\underline{b}$ è risolto da $\underline{A}^{-1}\underline{A}\underline{x}=\underline{A}^{-1}\underline{b} \Rightarrow \underline{x}=\underline{A}^{-1}\underline{b}$

Teorema (di Cramer): Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ t.c. $\det(A) \neq 0$

e sia $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, allora la soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ può essere calcolata come $x_j = \frac{|B_j|}{|A|} \quad \forall j=1, \dots, n$ e

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$