

Teorema (di Binet): Siano A e B due matrici di tipo $n \times n$, allora $\det(A \cdot B) = |A| \cdot |B|$
" $\det(A) = \det(B)$

Esempio:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Osservazione: } P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^3 = I_3$$

Siccome $\det(I_n) = 1$, allora $\det(P^3) = (\det(P))^3 = 1$

$$\Rightarrow \det(P) = 1.$$

$$\text{Siano } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e } B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & b_{22} & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

rispettivamente una matrice triangolare alta e triang. bassa,
allora $|A| = \prod_{j=1}^n a_{jj} = a_{11} \cdots a_{nn}$ e $|B| = \prod_{j=1}^n b_{jj} = b_{11} \cdots b_{nn}$

Verifica: Procediamo per induzione; nel caso $n=1$, $\det((a_{11})) = a_{11} \quad (0/0)$

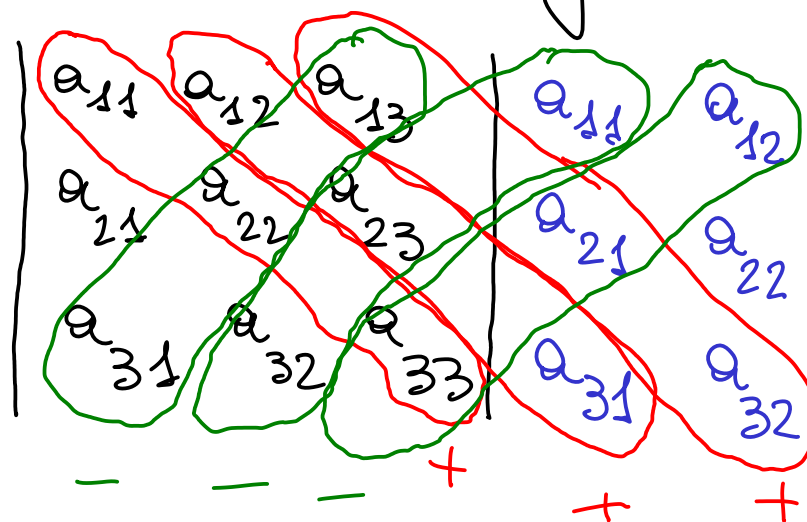
Supponiamo ora che è vero che $|A| = \prod_{j=1}^{n-1} a_{jj}$ quando A è di tipo $(n-1) \times (n-1)$
studiamo $|A|$ quando A è di tipo $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{nj} \cdot (-1)^{n+j} \cdot \underbrace{|A_{ij}|}_{\substack{\text{complemento algebrico} \\ \text{det. della matrice esclusa la riga } i \text{ e la col. } j}} = a_{nn} \cdot (-1)^{2n} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{nn} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} a_{jj} = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{n-1, n-1} \cdot a_{nn}$$

Fine verifica.

Nel caso di matrici 3×3 il determinante si può calcolare con la regola di Sarrus:



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Nel caso di matrici 3×3 avremo associato il $\det \neq 0 [=0]$ all'indipendenza (dipendenza) lineare.

Teorema: Sia A una matrice di tipo $m \times n$ con m righe $\leq n$ colonne, cioè $A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_m \end{pmatrix}$ dove $\underline{a}_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ vettore n -dim.,

allora $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ sono linearmente indipendenti se e solo se
^{almeno} una sottomatrice $m \times m$ (fatta con le colonne di A) t.c. il suo
det $\neq 0$.

Di conseguenza, $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ sono linearmente dipendenti se tutte le sottomatrici di tipo $m \times m$ hanno determinante nullo.

Def.: Sia A una matrice di tipo $m \times n$, diciamo che il suo
rank è k (si scrive $\text{rank}(A) = k$) quando $\exists$ una sottomatrice
di tipo $k \times k$ che ha $\det \neq 0$ e tutte le sottomatrici di tipo $(k+1) \times (k+1)$
hanno determinante nullo.

Proposizione (di Kronecker): Una matrice A di tipo $n \times n$ è t.c. $\text{rank}(A) = k$ se $\exists$ una sottomatrice di tipo $k \times k$ con $\det \neq 0$ e tutte le sottomatrici che si ottengono da quest'ultima aggiungendo una riga e una colonna hanno determinante nullo.

Oss.: (utile a risparmiare un po' di calcoli).

Esempio 4.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\det(1) = 1$, allora $\text{rank}(A) \geq 1$.

Siccome $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(A) \geq 2$.

Proviamo a trovare la sottomatrice $\nearrow$, cioè

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \cancel{1 \cdot 0 \cdot 6} + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 4 - \cancel{3 \cdot 0 \cdot 2} - \cancel{1 \cdot 3 \cdot 4} - 2 \cdot 2 \cdot 6 = \cancel{12} + 24 - \cancel{12} - 24 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \cancel{1 \cdot 0 \cdot 8} + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 4 - \cancel{2 \cdot 0 \cdot 4} - 1 \cdot 5 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 8 =$$

$$= \cancel{20} + 32 - \cancel{20} - 32 = 0$$

- - + + +

Matrici inverse (utilissime perché $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{x} = A^{-1}\underline{b}$)

Def.: Sia A una matrice $n \times n$ diciamo che A^{-1} è la sua
inversa quando $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \underline{I}_n$

Osservazione: Se A ammette l'inversa A^{-1} , allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$$\text{Siccome } \det(A^{-1} \cdot A) = \det(\underline{I}_n) \xRightarrow[\text{per Binet}]{\uparrow} \det(A^{-1}) \cdot \det(A) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Teorema: A di tipo $n \times n$ è invertibile se e solo se
 $\det(A) \neq 0$.