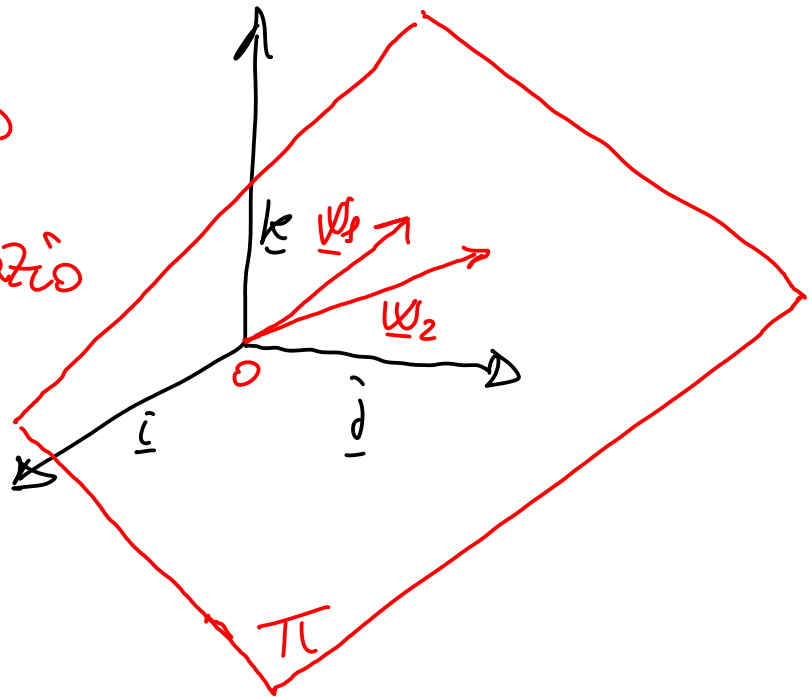


Def.: Dato uno spazio vettoriale V diciamo che
un suo sottosistema $W \subseteq V$ è un sottospazio
quando W è a sua volta uno spazio vettoriale,
cioè $\forall \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ e $\forall d \in \mathbb{R}$ si ha che
 $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$ e $d \underline{w}_1 \in W$

Esempio: il piano π generato
da $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$ è un sottospazio
di $\mathbb{R}^3$.



Prodotto matriciale

Sia A una matrice di tipo $m \times n$ e B una matrice di tipo $n \times p$, allora definiremo $C = AB$ matrice prodotto di

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}, \text{ con la matrice } C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$$\text{tale che } c_{ij} = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot b_{lj}$$

Il prodotto è ben definito solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda; si dice che A e B sono conformabili.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 22 \\ -31 & 58 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \sum_{\ell=1}^3 a_{1\ell} \cdot b_{\ell 1} = (1, 2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - 2 \cdot 7 + 3 \cdot 0 = -13$$

$$c_{12} = \sum_{\ell=1}^3 a_{1\ell} \cdot b_{\ell 2} = (1, 2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 1 = 3 + 16 + 3 = 22$$

$$c_{21} = \sum_{\ell=1}^3 a_{2\ell} \cdot b_{\ell 1} = (4, 5, 6) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-7) + 6 \cdot 0 = 4 - 35 = -31$$

$$c_{22} = \sum_{\ell=1}^3 a_{2\ell} \cdot b_{\ell 2} = (4, 5, 6) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 1 = 12 + 40 + 6 = 58$$

Proprietà del prodotto matriciale:

Siano A e B conformabili, così come B e C , allora

$$(AB)C = A(BC) \quad (\text{associativa})$$

Siano A e B dello stesso tipo conformabile con C allora

$$(A+B)C = AC + BC \quad (\text{prop. distributiva})$$

Se A è di tipo $n \times n$ (cioè "quadrata") allora

$$A \cdot \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n \cdot A = A \quad \text{dove } \mathbb{I}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ colonne}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}} \right\} n \text{ righe}$$

In generale si ha che

$AB \neq BA$ (non vale neppure per matrici quadrate).

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

allora si.
dice che
 A^T è la sua
trasposta

→ quando $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

Vale la proprietà

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Calcolo del determinante per matrici $n \times n$

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

allora definiamo "determinante di A"
la quantità

$$|A| = \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \text{dove } A_{ij} \text{ è il complemento algebrico di } a_{ij} \text{ ed è definito come } A_{ij} = (-1)^{i+j} \Pi_{ij}$$

$$e \quad \Pi_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cioè Π_{ij} è il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene da A levando la i -esima riga e j -esima colonna.

Inoltre, possiamo definire $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$

Sia $B = (b)$ con $b \in \mathbb{R}$
una matrice di tipo 1×1
allora $\det(B) = |b| = b$.

Proposizione: il $\det(A) = |A|$ non dipende dall'indice di riga o di colonna che si usa per il calcolo.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} |a_{22}| + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} |a_{21}| =$
 $= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ← facciamo il conto rispetto alla 3ª riga

$$\begin{aligned}
 |A| &= \sum_{j=1}^4 a_{3j} \cdot (-1)^{3+j} \Pi_{3j} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \Pi_{32} + 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &\quad + 0 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \Pi_{34} = 2 \cdot (2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}) \\
 &\quad + 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot (5+2) - 3 \cdot (2+1) + 4 \cdot (-4+5)) + 3 \cdot (2+1) \\
 &= 2 \cdot (14 - 9 + 4) + 3 \cdot 3 = 2 \cdot 9 + 9 = 27
 \end{aligned}$$

Teorema [proprietà del determinante]: Sia A una matrice $n \times n$, allora

- se A ha una riga/colonna fatta di soli zeri allora $|A| = 0$
- se $A = \text{diag}(1, \dots, 1)$, cioè

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ allora } |A| = \prod_{j=1}^n \lambda_j = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

• Sia $A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 + \underline{b}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ dove $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ sono "vettori riga" (cioè matrici di tipo $1 \times n$) allora $|A| = \left| \begin{matrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} \underline{b}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{matrix} \right|$

• Sia $A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $|A| = \left| \begin{matrix} \lambda \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{matrix} \right| = \lambda \cdot |A|$

• Sia A invertibile allora sia $A' = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_{i-1} \\ \underline{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \underline{a}_{i-2} \\ \underline{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ si ha che $|A'| = -|A|$

• $|A| = |A^T|$

• Sia $A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ t.c. $\underline{a}_n = \sum_{j=1}^{n-1} d_j \underline{a}_j$ allora $|A| = 0$, cioè se le righe sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \det = 0$.