

1/2 dell'esercizio 40

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si determini } \text{Ker}(A)$$

Ricordiamo che $\text{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Scriviamo la definizione di $\text{Ker}(A)$ in termini di un sistema di eq.

$$\begin{cases} 2b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 = 0 \\ 3b_1 + 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 = 0 \\ -b_1 - b_2 + b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b_1 + b_3 = 0 \\ 3b_1 + b_2 = 0 \\ -b_1 - b_2 + b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = -2b_1 \\ b_2 = -3b_1 \\ \cancel{1b_1 + 3b_1 - 2b_1 = 0} \Rightarrow 0=0 \end{cases}$$

quindi $\begin{cases} b_1 = t \\ b_2 = -3t \\ b_3 = -2t \end{cases}$ o anche $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\text{Ker}(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \forall t \in \mathbb{R} \right\}$$

L'altra metà dell'esercizio 40

Si determini $\text{Im}(A)$ cioè l'immagine di A , cioè

Def: Sia A una matrice 3×3 , diciamo che la sua immagine

$$\text{è } \text{Im}(A) = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 : \exists \underline{u} \in \mathbb{R}^3, A\underline{u} = \underline{v} \}$$

Riordiniamo la def. della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mid \exists \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ t.c. } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} v_1 = 2u_1 + u_3 \\ v_2 = 3u_1 + u_2 \\ v_3 = -u_1 - u_2 + u_3 \end{cases}$$

Osserviamo che $v_1 - v_2 = -u_1 + u_3 - u_2 = v_3$

$$\Rightarrow \text{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mid v_3 = v_1 - v_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix} \mid \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Poniamo $v_1 = x, v_2 = y, v_3 = z \rightarrow \text{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = x - y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$

cioè deve essere soddisfatta l'eq. $x - y - z = 0$.

Def.: Diciamo che un insieme V è uno spazio vettoriale se su di esso sono definite 2 operazioni di somma e prodotto per scalare t.c. $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ e $s, t \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\underline{u} + \underline{v} \in V, \quad s\underline{u} \in V$$

$$(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) \quad (\text{prop. associativa di } +)$$

$$1\underline{u} = \underline{u} \quad (1 \text{ è el. neutro del prod. scalare})$$

$$\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u} \quad (\text{prop. commutativa di } +)$$

$$\exists \underline{0} \in V \text{ t.c. } \underline{u} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{u} = \underline{u} \quad (\exists \text{ el. neutro per } +)$$

$$s(t\underline{u}) = (st)\underline{u} \quad (\text{associatività del prod. per scalare})$$

$$\exists -\underline{u} \in V \text{ t.c. } \underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{0} \quad (\exists \text{ l'inverso risp. a } +)$$

$$s(\underline{u} + \underline{v}) = s\underline{u} + s\underline{v} \quad (\text{distributività})$$

$$(s+t)\underline{u} = s\underline{u} + t\underline{u} \quad (\quad " \quad)$$

Esempio

Si consideri $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale unito di somma $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ e di prodotto per scalare (sia $\lambda \in \mathbb{R}$) $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$.

Def.: dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ diciamo che
 $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$ è una loro combinazione lineare
dove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Def.: diciamo che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ sono linearmente indipendenti
se nessuno di loro può essere espresso come comb. lineare
degli altri $\iff$ se $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$ allora
 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Altrimenti, diciamo che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ sono linearmente dipendenti
se $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$ con
 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0) \iff \exists j$ per cui $\underline{v}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \beta_i \underline{v}_i$

Def.: diciamo che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ costituiscono una base dello sp. vett. V se
① $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti

$$(2) \forall \underline{w} \in V, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \underline{w} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \underline{v}_j$$

Inoltre, diciamo che V ha dimensione n

Proposizione: Se $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m$ e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono due basi dello stesso spazio vettoriale V , allora $m = n$.

Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

con $x_j, y_j \in \mathbb{R} \forall j = 1, \dots, n$.

Un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale V soddisfa le seguenti proprietà $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V, \forall s, t \in \mathbb{R}$:

- ① $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$ (distributività del $\cdot$ risp. a $+$)
- ② $(s\underline{u}) \cdot \underline{w} = s(\underline{u} \cdot \underline{w})$ (commutatività del $\cdot$ risp. al prod. per scalare)

$$\textcircled{3} \underline{u} \circ \underline{v} = \underline{v} \circ \underline{u} \quad (\text{commutatività di } \circ)$$

$$\textcircled{4} \underline{u} \circ \underline{u} \geq 0 \text{ e se } \underline{u} \circ \underline{u} = 0 \text{ allora } \underline{u} = \underline{0} \quad (\circ \text{ è def. positivo}).$$

Def.: se un'operazione da $V \times V$ in $\mathbb{R}$ soddisfa le $\textcircled{1} - \textcircled{4}$ allora si dice che è un prodotto scalare

Def.: diciamo che $\|\underline{v}\| = \sqrt{\underline{v} \circ \underline{v}}$ è la norma di $\underline{v} \in V$

$$\text{in } \mathbb{R}^n, \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Def.: Se V sp. vett. di dim. n è dotato di un'operazione di prodotto scalare ammette una base $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ t.c.

$$\|\underline{e}_j\| = 1, \quad \underline{e}_i \circ \underline{e}_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad (i, j = 1, \dots, n) \text{ allora si}$$

dice che $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ è una base ortonormale.

Esempio: in $\mathbb{R}^3$ $\underline{e}_1 = \hat{i}, \underline{e}_2 = \hat{j}, \underline{e}_3 = \hat{k}$ fanno una base ortonormale.

Def.: Sia $f: V \rightarrow W$ dove V e W sono 2 spazi vettoriali;
diciamo che f è una funzione lineare se $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ e
 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ si ha che

$$f(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2) = \alpha_1 f(\underline{v}_1) + \alpha_2 f(\underline{v}_2)$$

← (o operatore lineare)

Esempi: D e $\int$ sono operatori lineari sugli sp. di funzioni
(derivabili per D o integrabili per $\int$).

$$\text{Infatti, } D(\alpha g + \beta h) = \alpha g' + \beta h'$$

$$\int dx (\alpha g + \beta h) = \alpha \int dx g + \beta \int dx h$$

Def.: diciamo che

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è una matrice $m \times n$

(dove $a_{ij} \in \mathbb{R} \forall i=1, \dots, m$ e $j=1, \dots, n$)

Def.: detto $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ diciamo che il prodotto matrice per vettore tra A e $\underline{v}$ è

$$A \underline{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} v_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} v_j \end{pmatrix} = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \dots + a_{1n} v_n$$

Teorema: Siano V e W risp. 2 spazi vett. di dimensione n e m ,
 siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ e $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ due basi fissate risp. per V e
 per W , allora $\exists!$ la matrice A (di tipo $m \times n$) che
 descrive completamente l'azione di un op. lineare
 $L: V \rightarrow W$, cioè $\forall \underline{u} \in V$, si ha che $\underline{u} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$
 e $L(\underline{u}) = \beta_1 \underline{w}_1 + \dots + \beta_m \underline{w}_m$ (con $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ e $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$
 opportuni) $\Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$