

Ricordiamo qui di seguito come si esprime il prodotto matrice per vettore. In generale sia A una matrice 3×3 del tipo $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e sia $\underline{b}$ un vettore 3D del tipo $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ con $b_i \in \mathbb{R} \forall i, j=1,2,3$

allora si definisce $A\underline{b} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j} b_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j} b_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j} b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 \end{pmatrix}$

Sia ora B una matrice 3×3 di elementi $b_{il} \in \mathbb{R} \forall i, l=1,2,3$, cioè $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

allora si pone $C = AB$, con C di elementi $c_{il} \in \mathbb{R} \forall i, l=1,2,3$,

dove $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ e $c_{ie} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{je}$ (cioè $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \cdot (b_{1e}, b_{2e}, b_{3e})$)

Proprietà del prodotto matriciale: $\forall A, B, C$ matrici 3×3
 si ha che $(AB)C = A(BC)$ (prop. associativa)

($AB \neq BA$ in generale (non vale la prop. commutativa))

$A\mathbb{I} = \mathbb{I}A = A$ (dove $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cioè $\mathbb{I}$ è l'elemento neutro)

$(AB)^T = B^T A^T$

Def.: diciamo che U è una matrice ortogonale quando $U^T U = \mathbb{I}$

Def.: " " U è una rotazione quando $U^T U = \mathbb{I}$ e $|U| = 1$.

Proposizione: le rotazioni formano un gruppo, cioè

1. Se U e V sono rotazioni allora anche UV è una rotazione

2. $\mathbb{I}$ è una rotazione

3. $\forall$ rotazione $U \exists$ una rotazione U^{-1} t.c. $(U^{-1})U = \mathbb{I}$.

Verifica. Siano U e V t.c., $U^T U = V^T V = \mathbb{I}$ e $|U| = |V| = 1$

allora $(UV)^T (UV) = (V^T U^T) (UV) = V^T (U^T U) V =$

$$= (V^T \mathbb{I}) V = V^T V = \mathbb{I}$$

$$|UV| = |U||V| = 1 \cdot 1 = 1 \quad (\text{dove abbiamo applicato Binet}) \Rightarrow UV \text{ è una rotazione}$$

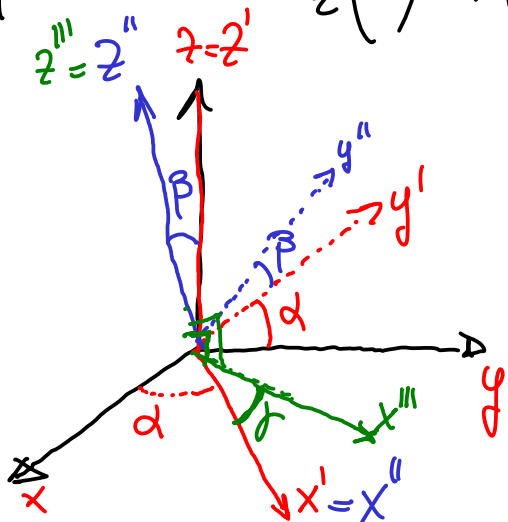
2. Siano $\mathbb{I}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$

$$\mathbb{I}^T \mathbb{I} = \mathbb{I} \mathbb{I} = \mathbb{I}$$

inoltre $|\mathbb{I}| = 1$

3. $(U^T)^T = U$, quindi $(U^T)^T \cdot U^T = (U U^T)^T = \mathbb{I}^T = \mathbb{I}$
 inoltre $|U^T| = |U| = 1$, cioè U^T è una rotazione; inoltre
 $U^T U = \mathbb{I}$ quindi U^{-1} è U^T .

Proposizione: Ogni matrice 3×3 che è una rotazione è
 esprimibile come la composizione di 3 rotazioni, cioè come prodotto
 del tipo $R_z(\gamma) R_x(\beta) R_z(\alpha)$ (α, β, γ sono noti come
 angoli di Eulero)



$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_x(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

Infattissimo che

$$\begin{aligned} A \underline{b} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_1 \\ a_{21} b_1 \\ a_{31} b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12} b_2 \\ a_{22} b_2 \\ a_{32} b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} b_3 \\ a_{23} b_3 \\ a_{33} b_3 \end{pmatrix} \\ &= b_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rappresentiamo il prodotto matriciale come combinazione lineare (di coefficienti b_1, b_2, b_3) dei 3 vettori $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$

Esempi: Sia $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora $A \underline{b} = \underline{v}_1$ dove $\underline{v}_1$ è la 1^a colonna di A .

Se $A = R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ allora $A \underline{b} = R_z(\alpha) \underline{b} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

Definizione: $\forall$ matrice 3×3 A diciamo che il suo nucleo è formato da $\text{Ker}(A) = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 : A \underline{v} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

Proposizione: Sia A una matrice 3×3 , allora
 $\text{Ker}(A) = \{ \underline{0} \}$ sse $|A| \neq 0$.

Verifica: Sia $|A| \neq 0$ allora se $\underline{b} \in \text{Ker}(A)$ si ha che

$$A \underline{b} = b_1 \underline{v}_1 + b_2 \underline{v}_2 + b_3 \underline{v}_3 = \underline{0} \quad \text{con } \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \text{ risp. } 1^a, 2^a \text{ e } 3^a \text{ colonna di } A$$

Ricordiamo che $|A| = |A^T| = \text{volume di}$  $\rightarrow$ se $|A| \neq 0$ allora

affinché $b_1 \underline{v}_1 + b_2 \underline{v}_2 + b_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$ dove essere $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ -

Viceversa se $|A| = 0$ allora $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono complanari allora
 $\exists$ una comb. lineare $b_1 \underline{v}_1 + b_2 \underline{v}_2 + b_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$ con $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$
 $\text{Ker}(A) \neq \{\underline{0}\}$

1/2 dell'esercizio 40

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si determini } \text{Ker}(A)$$

$$\text{Ricordiamo che } \text{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Scriviamo la definizione di $\text{Ker}(A)$ in termini di un sistema di eq.

$$\begin{cases} 2b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 = 0 \\ 3b_1 + 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 = 0 \\ -b_1 - b_2 + b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b_1 + b_3 = 0 \\ 3b_1 + b_2 = 0 \\ -b_1 - b_2 + b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = -2b_1 \\ b_2 = -3b_1 \\ \cancel{b_1 + 3b_1 - 2b_1 = 0} \Rightarrow 0=0 \end{cases}$$

quindi $\begin{cases} b_1 = t \\ b_2 = -3t \\ b_3 = -2t \end{cases}$ o anche $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\text{Ker}(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \forall t \in \mathbb{R} \right\}$$