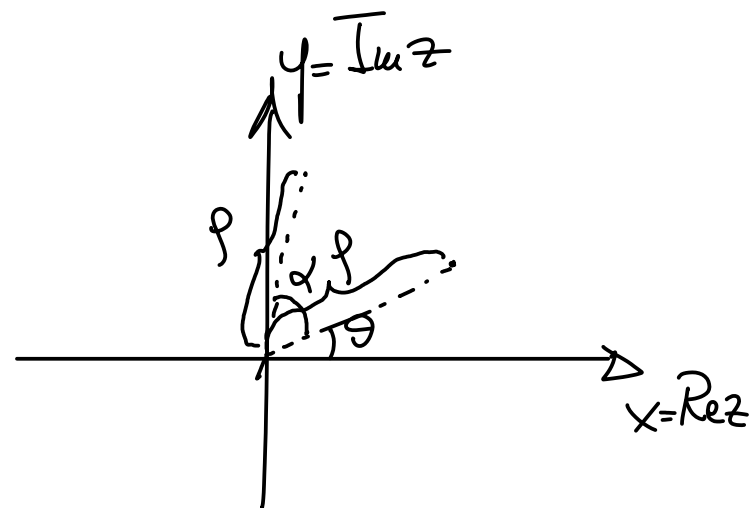


Rotazioni in 2D e 3D

Rotazioni nel piano

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Siano $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ruotate
di α rispetto a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$$z = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

La rotazione è espressa dalla
moltiplicazione per $e^{i\alpha}$

$$\text{Infatti: } z' = e^{i\alpha} \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta+\alpha)}$$

Se $z = a + ib$ è in forma algebrica allora

$$z' = e^{i\alpha} (x + iy) = (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (x + iy) =$$

$$= \underbrace{(x \cdot \cos \alpha - y \sin \alpha)}_{\text{Re}(z')} + i \underbrace{(y \cos \alpha + x \sin \alpha)}_{\text{Im}(z')} = x' + iy'$$

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow$
lo scriviamo
come a destra

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A destra dell'uguale abbiamo scritto il nostro primo prodotto matriciale per vettore. In generale sia A una matrice 3×3 del tipo $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e sia $\underline{b}$ un vettore 3D del tipo $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ con $b_i \in \mathbb{R} \ \forall i, j=1,2,3$

allora si definisce $A\underline{b} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j} b_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j} b_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j} b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 \end{pmatrix}$

Nel caso di prodotti matrice (2×2) per vettore 2D si avrà che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{pmatrix}$$

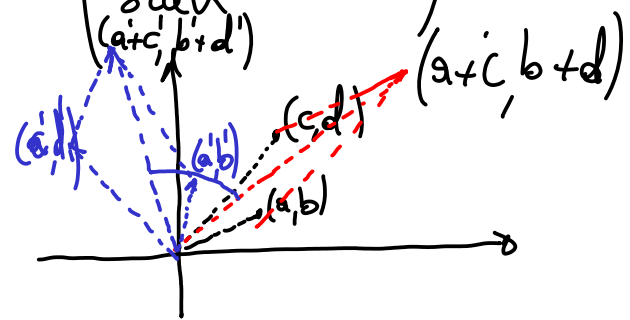
Nel caso specifico delle rotazioni 2D si ha:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Oss. Siano $\underline{u}, \underline{v}$ 2 vettori di coord. 2D (ad esempio $\underline{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

$\underline{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$) cosa succede quando si calcola $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \underline{u} + \underline{v} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) =$$



$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

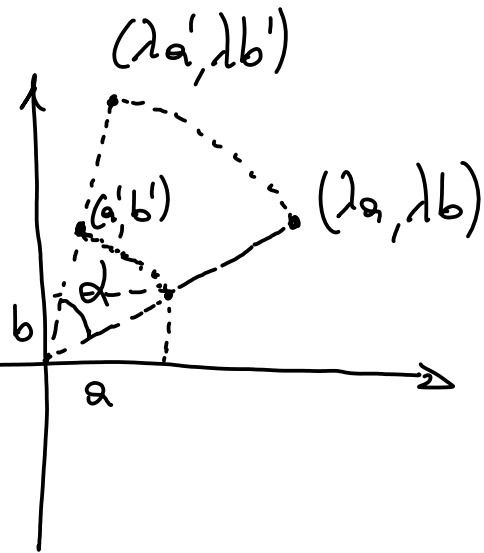
$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \underline{u} + \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \underline{v}$$

$A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ nel caso di matrici di rotazione A .

∀ vettore $\underline{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$A(\lambda \underline{u}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$= \lambda A\underline{u}$ dove A è la matrice di rotazione.



Sia $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (oppure $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$)

diciamo che L è un operatore lineare se $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ (oppure in $\mathbb{R}^3$) e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha che

$$L(\underline{u} + \underline{v}) = L(\underline{u}) + L(\underline{v})$$

$$L(\lambda \underline{u}) = \lambda L(\underline{u})$$

Oss. la rotazione in 2D è un operatore lineare.

Sia $R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è un op. lineare in 3D.

$$R_z(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Infatti,} \\ \text{si avrà} \end{matrix} \quad R_z(\alpha)(\underline{u} + \underline{v}) = R_z(\alpha)\underline{u} + R_z(\alpha)\underline{v}$$

$$e \quad R_z(\alpha)(\lambda \underline{v}) = \lambda R_z(\alpha) \underline{v}.$$

Teorema: $\forall$ operatore lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ (o da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$)

$\mathcal{I}$ (ed è pure unico, una volta fissati $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$) la sua

l'appresentazione matriciale t.c.

$$\mathcal{L}(x\underline{i} + y\underline{j}) = \mathcal{L}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \left(\text{oppure} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Oss.: } |R_z(\alpha)| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos \alpha (\cos \alpha - 0) + \sin \alpha (\sin \alpha - 0) + 0 \\ = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Def.: $\forall$ matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ definiamo la sua

matrice trasposta, A^T come quella si ottiene "scambiando righe e colonne", cioè $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Oss. le matrici di rotazione sono matrici ortogonali

cioè U è ortogonale $U U^T = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (oppure $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in 3D)

In fatti, $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Allo stesso modo si verifica che

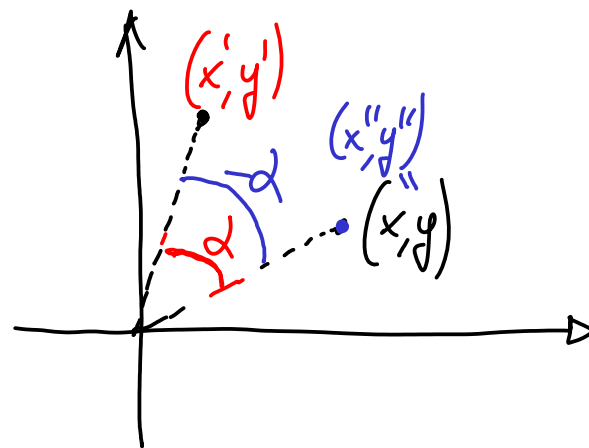
$$R_z(\alpha) (R_z(\alpha))^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

poiché $(R_z(\alpha))^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(-\alpha)$

Cioè quando compo $R_z(\alpha)$ con $R_z(-\alpha)$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ poiché}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Teorema [di Binet]: Siano A e B due matrici
 2×2 (oppure 3×3) allora

$$|AB| = |A| |B| \quad (\text{dove } |\cdot| \text{ è il determinante})$$

Proposizione: Sia A matrice 2×2 o 3×3 , si verifica
che $|A^T| = |A|$

Corollario: se U è ortogonale (cioè t.c. $UU^T = I$) allora

$$|U| = \pm 1$$

$$\text{Verifica: } |I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 1$$

$$|U| \cdot |U^T| = |I| = 1 \Rightarrow |U| \cdot |U^T| = |U|^2 = 1 \Rightarrow |U| = \pm 1.$$