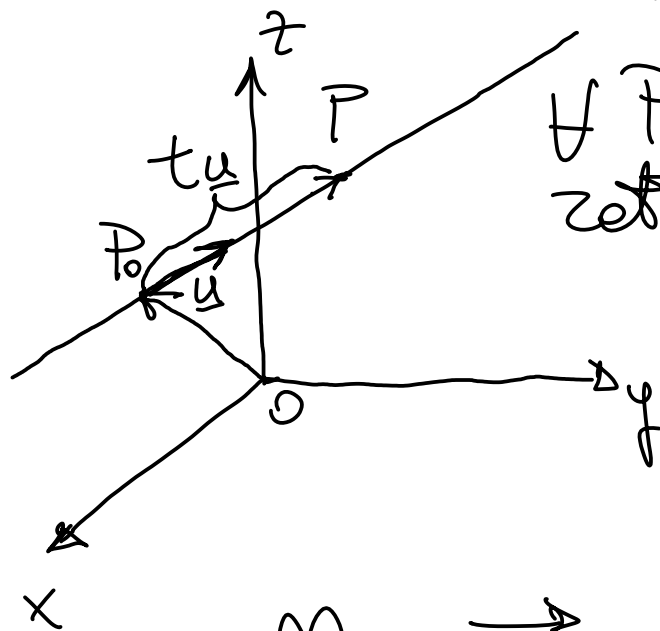


Geometria analitica lineare in 3D



$\forall P$ sulla
retta $\vec{P_0P} = t\underline{u}$
dove $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Sia } \vec{OP_0} = x_0 \underline{i} + y_0 \underline{j} + z_0 \underline{k}$$

P_0 identificato dalla terna $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

Sia $\underline{u}$ identificato da $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

$$\text{cioè } \underline{u} = a \underline{i} + b \underline{j} + c \underline{k}$$

allora $\vec{P_0P} = t\underline{u} \Rightarrow$ sia P di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ allora

$$(x - x_0) \underline{i} + (y - y_0) \underline{j} + (z - z_0) \underline{k} = t(a \underline{i} + b \underline{j} + c \underline{k}) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

la forma parametrica di una retta nello spazio $\forall t \in \mathbb{R}$

Se $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ possiamo scrivere

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$



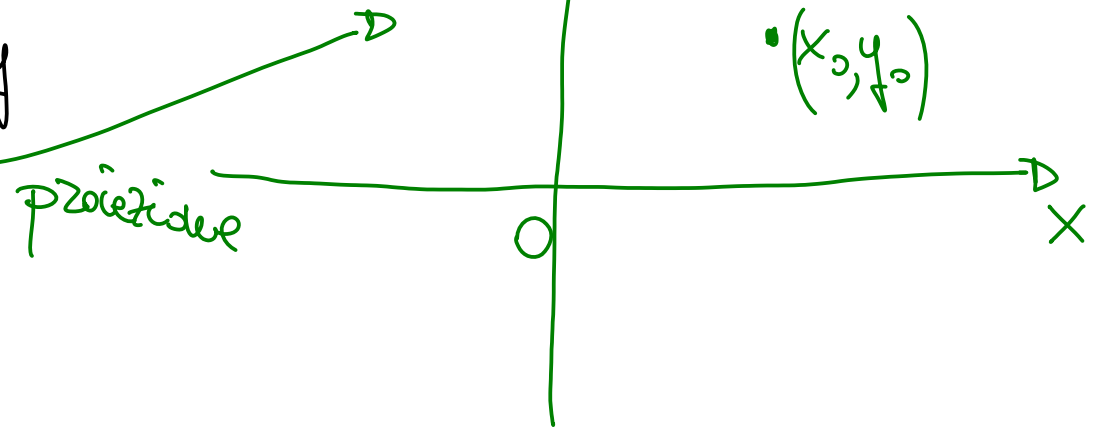
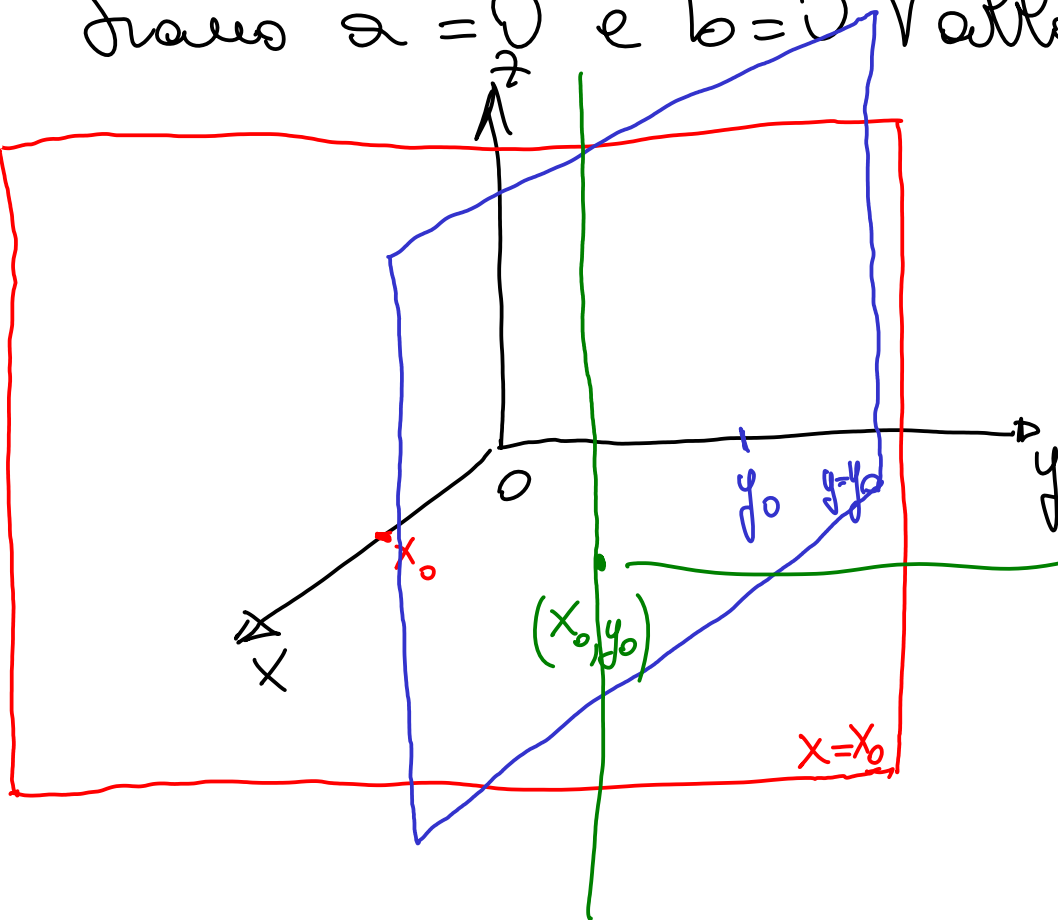
$$\begin{cases} t = (x - x_0)/a \\ t = (y - y_0)/b \\ t = (z - z_0)/c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \\ \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(y-y_0) = b(x-x_0) \Rightarrow bx - ay = bx_0 - ay_0 \\ c(y-y_0) = b(z-z_0) \Rightarrow bz - cy = bz_0 - cy_0 \end{cases}$$

Sei $a=0$ e $b=0$ ^{$c \neq 0$} Allora le eq. diventano

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$



Esempio 2.1: ? equazione della retta passante per i
punti $P_0 = (3, -1, 1)$ e $P_1 = (4, 2, -3)$

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = (4-3, 2-(-1), -3-1) = (1, 3, -4)$$

✓ punto $P = (x, y, z)$ della retta deve essere soddisfatta la relazione
 $\overrightarrow{P_0 P} = t \overrightarrow{P_0 P_1} \rightarrow (x-3, y+1, z-1) = t(1, 3, -4) \rightarrow \begin{cases} x=3+t \\ y=-1+3t \\ z=1-4t \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3 = \frac{y+1}{3} \\ \frac{y+1}{3} = -\frac{z-1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-y=10 \\ 4y+3z=-1 \end{cases}$$

in forma
parametrica

in forma cartesiana

Oss. Siano r, s 2 rette identificate da $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ $r: \begin{cases} x=x_0'+a't' \\ y=y_0'+b't' \\ z=z_0'+c't' \end{cases} s:$
 Affinché siano parallele deve esistere $\lambda \in \mathbb{R}$
 t.c. $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$, cioè

$$\begin{cases} a' = \lambda a \\ b' = \lambda b \\ c' = \lambda c \end{cases}$$

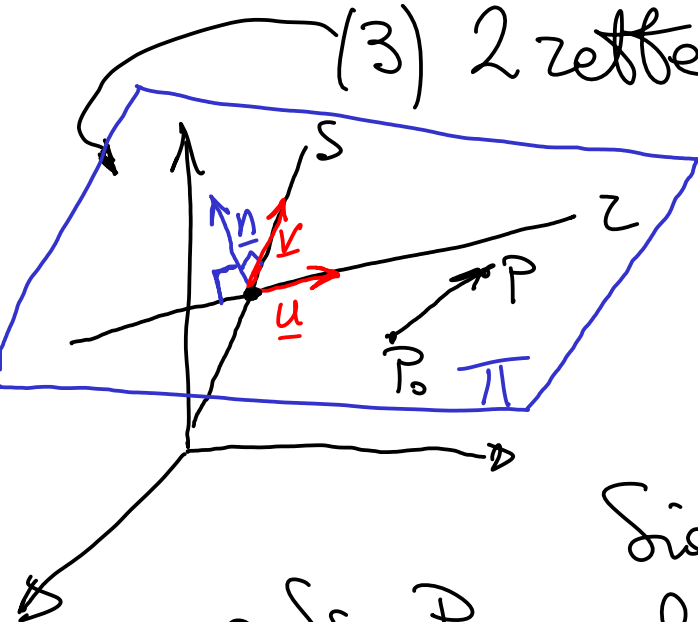
Affinché siano ortoguali deve essere verificato che
 $(a, b, c) \cdot (a', b', c') = aa' + bb' + cc' = 0$

Un piano è identificato da

(1) 3 punti:

(2) un punto e una retta

(3) 2 rette con un punto in comune.



Siano $\underline{u}$ e $\underline{v}$ i vettori direzionali relativi alle rette z ed s , risp., allora $\underline{n} = \underline{u} \wedge \underline{v}$ è ortogonale a entrambi.

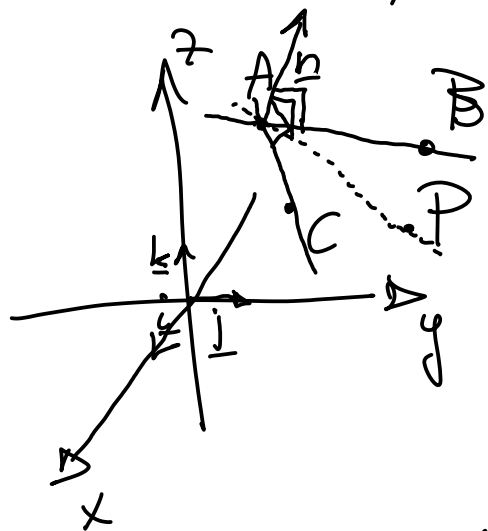
Sia $P_0 \in \Pi$ (Π è il piano che vogliamo determinare)
 e sia P un qualsiasi punto di Π allora $\overrightarrow{P_0 P} \cdot \underline{n} = 0$

$$\Rightarrow P_0 = (x_0, y_0, z_0), \underline{u} = (a, b, c) \text{ e } T = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 = ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)$$

Esempio 2.2: ? piano π passante per $A = (1, 0, -1)$

$$B = (2, 1, 0), C = (0, 1, -2)$$



$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \quad \overrightarrow{AC} = (-1, 1, -1)$$

$$\underline{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{n} = (-2, 0, 2)$$

$$= -2\underline{i} - 0\underline{j} + 2\underline{k}$$

P di coord. (x, y, z) deve essere t.c. $\overrightarrow{AP} \cdot \underline{n} = 0$

$$\begin{aligned}
 (x-1, y-0, z+1) \cdot (-2, 0, 2) &= 0 \rightarrow -2(x-1) + 2 \cdot (z+1) = 0 \\
 &\Rightarrow -2x + 2 + 2z + 2 = 0 \\
 &\Rightarrow -x + z + 2 = 0
 \end{aligned}$$

Siano π e π' di eq. $ax + by + cz = d$ e $a'x + b'y + c'z = d'$; affinché π e π'

siano paralleli deve essere

$$(a', b', c') = \lambda (a, b, c) \text{ per } \lambda \in \mathbb{R}$$

Affinché siano ortogonali deve essere

$$(a, b, c) \cdot (a', b', c') = 0 \Rightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

