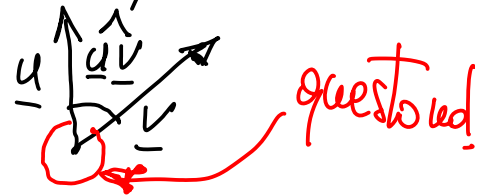


————— 0 —————

Def.: si dice che $\underline{w}$ è il prodotto vettoriale dei vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ (si scrive $\underline{w} = \underline{u} \wedge \underline{v}$) dove $\underline{w}$ è t.c. ① $|\underline{w}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin(\hat{\underline{u}}\hat{\underline{v}})$



② la direzione $\underline{w}$ è ortogonale a $\underline{u}$ e $\underline{v}$

③ $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ formano una terna destrorsa (regola della mano destra)

Proprietà (del prodotto vettoriale): $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, si ha che
 $\underline{u} \wedge \underline{v} = -\underline{v} \wedge \underline{u}$ (prop. anticommutativa)

$$\underline{u} \wedge (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \wedge \underline{v} + \underline{u} \wedge \underline{w} \quad (\text{prop. distributiva})$$

$$(\alpha \underline{u}) \wedge \underline{v} = \alpha (\underline{u} \wedge \underline{v}) \quad (\Rightarrow \underline{u} \wedge (\alpha \underline{v}) = -(\alpha \underline{v}) \wedge \underline{u} = -\alpha (\underline{v} \wedge \underline{u}) = \alpha (\underline{u} \wedge \underline{v}))$$

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{v} = \lambda \underline{u} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Oss.: Se $|\underline{u} \wedge \underline{v}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}|$, allora $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono ortogonali.

Siano $\underline{u} = x_1 \underline{i} + x_2 \underline{j} + x_3 \underline{k}$ e $\underline{v} = y_1 \underline{i} + y_2 \underline{j} + y_3 \underline{k}$, si verifica

$$\text{che } \underline{u} \wedge \underline{v} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \underline{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \underline{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \underline{k}$$

formalmente

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

matrice 3x3

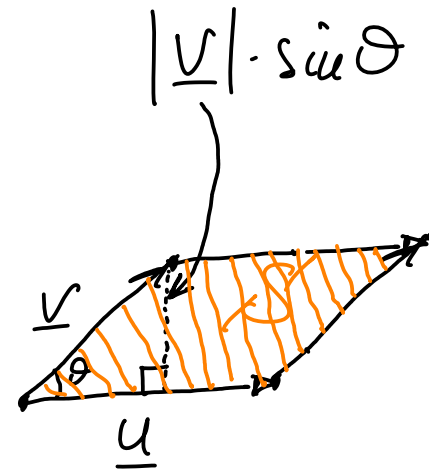
segno di determinante

$$= \underline{i} (x_2 y_3 - x_3 y_2) - \underline{j} (x_1 y_3 - x_3 y_1) + \underline{k} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

che abbiamo sfruttato la def. di determinante di una matrice 2×2 , cioè $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Osservazioni (di tipo geometrico):

$$|\underline{u} \wedge \underline{v}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin(\vartheta) = S$$

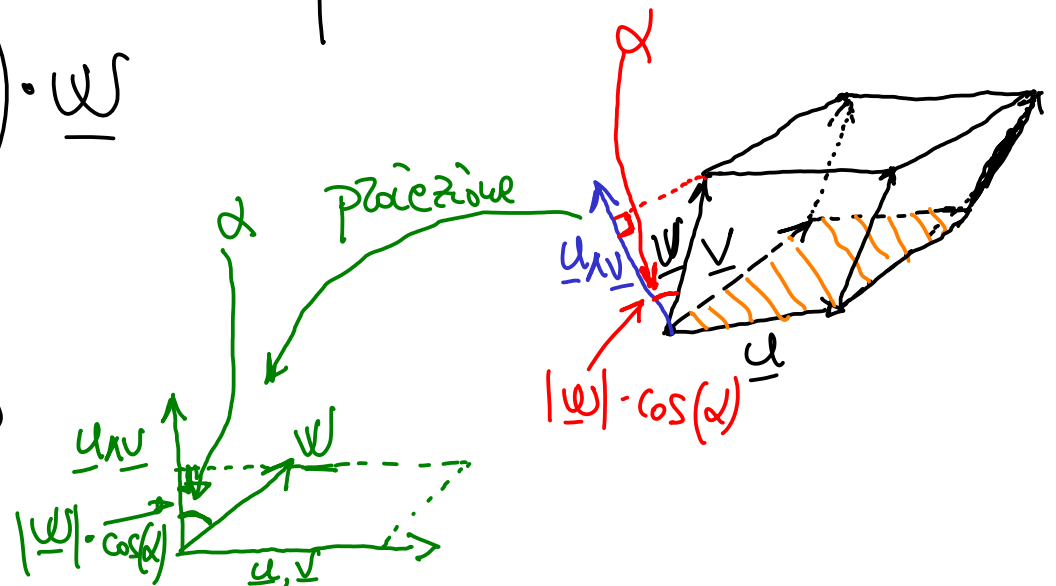


superficie del parallelogramma di lati $\underline{u}$ e $\underline{v}$

Consideriamo $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ 3 vettori nello spazio e cerchiamo di comprendere il significato di $(\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w}$

$$(\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w} = |\underline{u} \wedge \underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos(\alpha)$$

= Volume del parallelepipedo di spigoli $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$



Proprietà (del prodotto misto): $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ si ha che

$$(\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w} = (\underline{v} \wedge \underline{w}) \cdot \underline{u} = (\underline{w} \wedge \underline{u}) \cdot \underline{v}$$

$$(\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w} = -(\underline{v} \wedge \underline{u}) \cdot \underline{w} = -(\underline{u} \wedge \underline{w}) \cdot \underline{v} = -(\underline{w} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{u}$$

Siano $\underline{u} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$, $\underline{v} = y_1 \hat{i} + y_2 \hat{j} + y_3 \hat{k}$, $\underline{w} = z_1 \hat{i} + z_2 \hat{j} + z_3 \hat{k}$

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = (x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}) \cdot \left[(y_2 z_3 - y_3 z_2) \hat{i} - (y_1 z_3 - y_3 z_1) \hat{j} + (y_1 z_2 - y_2 z_1) \hat{k} \right] =$$

$$= x_1 (y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2 (y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3 (y_1 z_2 - y_2 z_1) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

vale per la definizione di determinante di una matrice 3×3

Conclusione: il determinante della matrice composta dalle triple di coordinate (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) e (z_1, z_2, z_3)

(in valore assoluto)

è uguale al volume del parallelepipedo che ha un vertice nell'origine e i vertici dei 3 spigoli uscenti dall'origine proprio in corrispondenza alle coordinate (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) e (z_1, z_2, z_3) .

Def.: Siano $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ n vettori e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ allora diciamo che $\alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_n \underline{u}_n \left(= \sum_{j=1}^n \alpha_j \underline{u}_j \right)$ è una combinazione lineare.

Def.: diciamo che $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ sono linearmente dipendenti se almeno uno di essi può essere espresso come comb. lineare

degli altri, cioè $\exists \alpha_2, \dots, \alpha_n$ t.c.

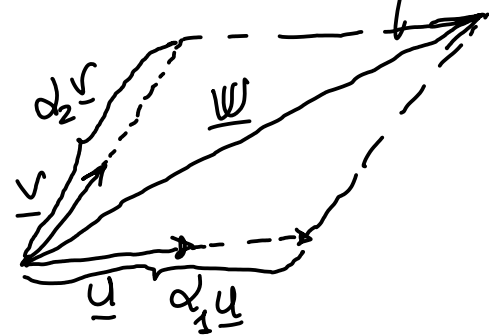
$$\underline{u}_1 = \alpha_2 \underline{u}_2 + \dots + \alpha_n \underline{u}_n = \sum_{j=2}^n \alpha_j \underline{u}_j$$

Diciamo che $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ sono linearmente indipendenti quando nessuno di loro può essere espresso come comb. lineare degli altri.

Prop.: $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ sono linearmente indipendenti se e
ovvero che $\alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_n \underline{u}_n = \underline{0} \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Se in $\mathbb{R}^3$ abbiamo 3 vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ linearmente dipendenti
significa che, ad esempio, $\underline{w} = \alpha_1 \underline{u} + \alpha_2 \underline{v}$

$$\Rightarrow (\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w} = 0$$



Conclusion: il determinante della matrice composta
dalle triple di coordinate (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) e (z_1, z_2, z_3)
si annulla se e solo se $\underline{u} = x_1 \underline{i} + x_2 \underline{j} + x_3 \underline{k}$,
 $\underline{v} = y_1 \underline{i} + y_2 \underline{j} + y_3 \underline{k}$, $\underline{w} = z_1 \underline{i} + z_2 \underline{j} + z_3 \underline{k}$
sono linearmente dipendenti.