

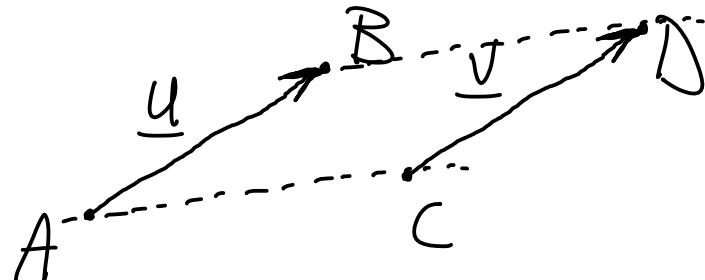
Vettori (introduzione)

$\underline{ma} = \underline{F}$ con $\underline{a}$ e $\underline{F}$ sono grandezze vettoriali.

Def.: un vettore è un segmento orientato, caratterizzato da

- (1) una lunghezza (o modulo),
- (2) una direzione (la retta su cui piazze il vettore e rette parallele individuano la stessa direzione)
- (3) un verso (di percorrenza sulla retta)

Graficamente, un vettore nel piano (o nello spazio) è rappresentato da un segmento orientato, viene identificato (come scrittura) con $\overrightarrow{AB}$ oppure con una lettera minuscola sottolineata (o in grassetto), cioè $\underline{u}$, $\underline{v}$ etc.

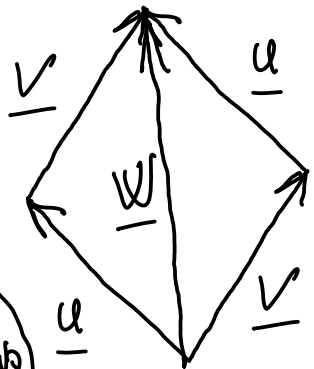


Osservazione: se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono t.c. $\overrightarrow{ABCD}$ è un parallelogramma (e quindi $\underline{v}$ si ottiene $\underline{u}$ per "traslazione parallela") allora $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono lo stesso vettore.

Operazioni sui vettori

Siano $\underline{u}$ e $\underline{v}$ 2 vettori la somma si ottiene con la "regola del parallelogramma" e si scrive $\underline{w} = \underline{u} + \underline{v}$,

dare



di gruppo commutativo

Proprietà (della somma vettoriale): $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ si ha

che (1) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (prop. associativa)

(2) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (prop. commutativa)

(3) $\exists \underline{0}$ t.c. $\underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$ (el. neutro)

(4) $\exists -\underline{u}$ t.c. $\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{0}$ (inverso)



Def. $\forall$ vettore $\underline{u}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ diciamo che il prodotto per scalare tra α e $\underline{u}$ è il vettore $\alpha \underline{u}$ t.c. ha stessa direzione di $\underline{u}$, lunghezza uguale ad $|\alpha| |\underline{u}|$ (dove $|\underline{u}|$ è la lunghezza di $\underline{u}$) e verso uguale ad $\underline{u}$ se $\alpha > 0$, verso opposto ad $\underline{u}$ se $\alpha < 0$

Proprietà del prodotto per scalare: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \underline{u}, \underline{v}$
si ha che $\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha \underline{u} + \alpha \underline{v}$ (prop. distributiva)

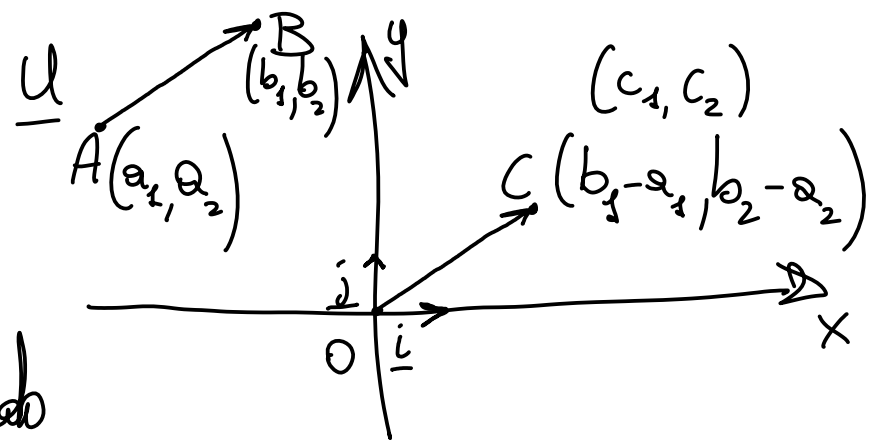
$$1 \underline{u} = \underline{u} \quad (\text{I l'unità})$$

$$\alpha(\beta \underline{u}) = \alpha\beta \underline{u}$$

$$(\alpha + \beta) \underline{u} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{u}$$

Vettori nel piano

Un vettore è identificato dalle coordinate (c_1, c_2) della testa C quando viene traslato con la coda in O .



Def. $\underline{i}, \underline{j}$ sono i vettori fondamentali del piano identificati dalle coordinate (delle teste) $(1, 0)$ e $(0, 1)$ rispettivamente.

Oss.: $|\underline{i}| = |\underline{j}| = 1$ (ecco perché si dicono vettori)

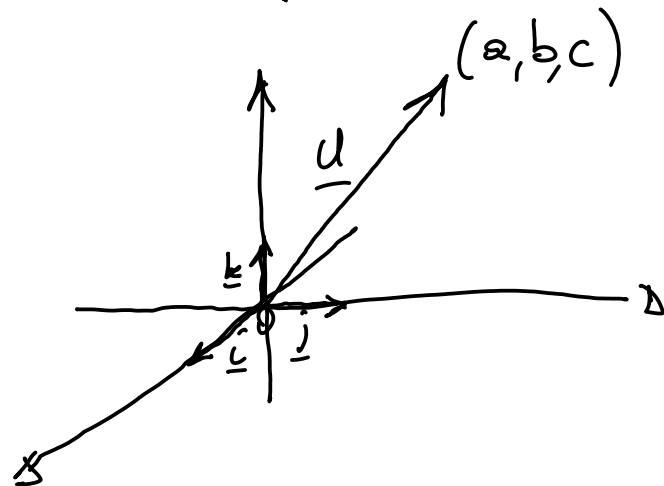
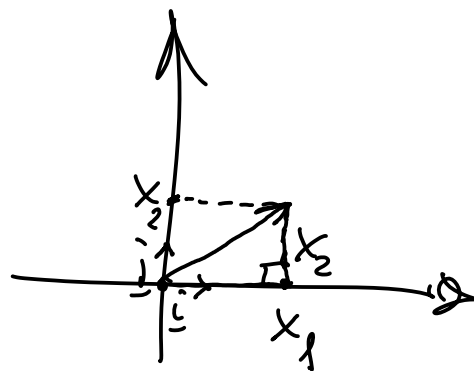
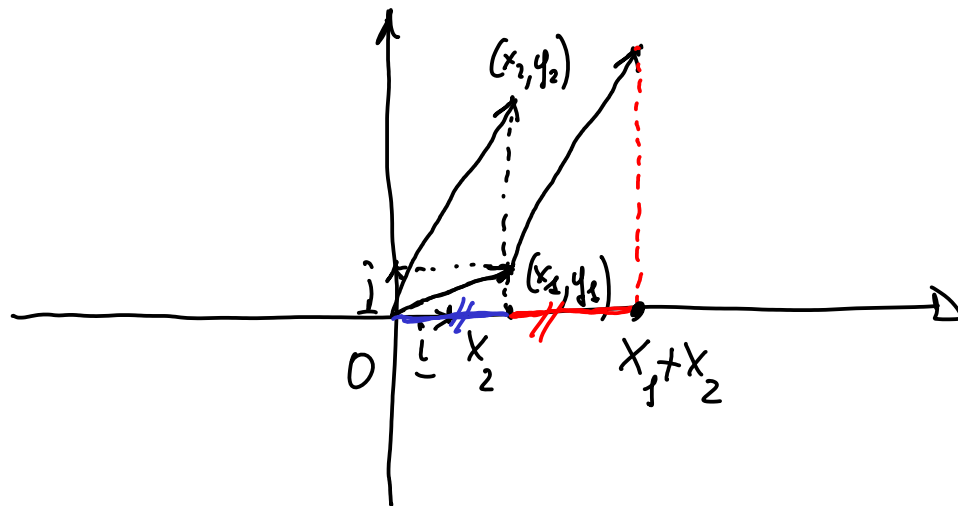
$$\overrightarrow{OC} = \underline{u} = \overrightarrow{AB} = c_1 \underline{i} + c_2 \underline{j}$$

Oss.: siano $\underline{u} = x_1 \underline{i} + x_2 \underline{j}$ e $\underline{v} = y_1 \underline{i} + y_2 \underline{j}$, allora

$$\underline{u} + \underline{v} = (x_1 + x_2)\underline{i} + (y_1 + y_2)\underline{j}$$

$$d\underline{u} = (dx_1)\underline{i} + (dx_2)\underline{j}$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{per il teorema di Pitagora}$$



Vettori nello spazio

Def.: i vettori fondamentali
nello spazio sono $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ risp.
di coordinate $\underline{i} = (1, 0, 0), \underline{j} = (0, 1, 0)$
 $\underline{k} = (0, 0, 1)$

Ogni vettore $\underline{u}$ è identificato dalle coordinate della testa
(in figura $\underline{u} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$)

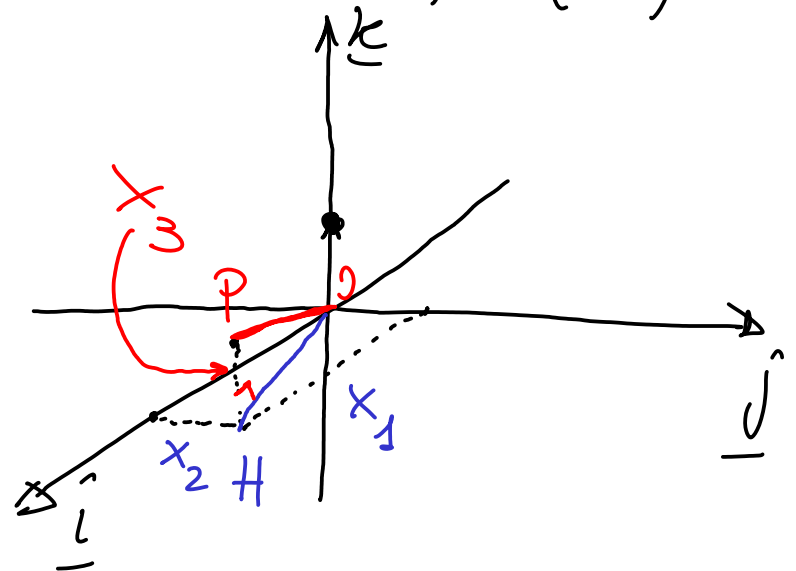
Operativamente, la somma di 2 vettori $\underline{u} = x_1\underline{i} + x_2\underline{j} + x_3\underline{k}$
e $\underline{v} = y_1\underline{i} + y_2\underline{j} + y_3\underline{k}$ dà come risultato $\underline{w} = (x_1 + y_1)\underline{i} + (x_2 + y_2)\underline{j} + (x_3 + y_3)\underline{k}$

$\forall d \in \mathbb{R}$ il prodotto per scalare $d\underline{u} = (dx_1)\underline{i} + (dx_2)\underline{j} + (dx_3)\underline{k}$

Calcoliamo $OP = |\underline{u}| = \sqrt{OH^2 + PH^2}$,

dove $OH = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $PH \perp OH$,

$$OP = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

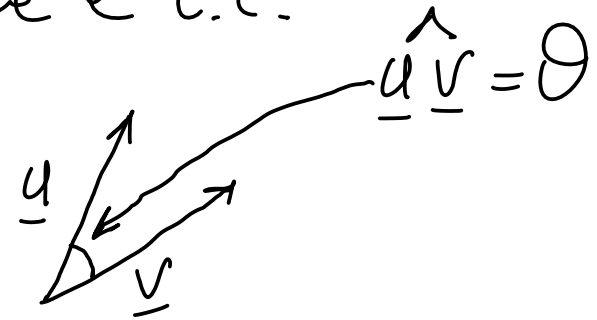


Def.: dati 2 vettori $\underline{u} = x_1 \underline{i} + x_2 \underline{j} + x_3 \underline{k}$ e $\underline{v} = y_1 \underline{i} + y_2 \underline{j} + y_3 \underline{k}$
 allora diciamo che il loro prodotto scalare

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sum_{j=1}^3 x_j y_j$$

Geometricamente il prodotto scalare è t.c.

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos(\theta)$$



Proprietà (del prodotto scalare): $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \quad \alpha \in \mathbb{R}$ si ha che

$$(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w} \quad (\text{distributiva})$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u} \quad (\text{prop. commutativa})$$

$$(\alpha \underline{u}) \cdot \underline{v} = \alpha (\underline{u} \cdot \underline{v})$$

$$\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0 \text{ e si ha } \underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \text{ sse } \underline{v} = \underline{0}$$

L'ultima proprietà è evidente da $\underline{v} \cdot \underline{v} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\underline{v}|^2$