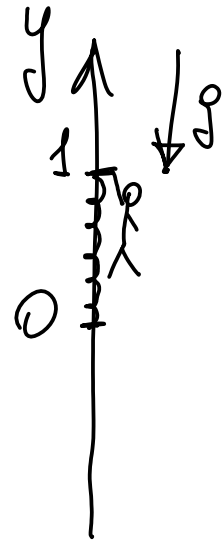


Esercizio 3.5 (con piccola variazione)

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = -1 \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \ddot{y} = -2\dot{y} - 3y - 1$$



Consideriamo l'eq. omogenea associata, cioè

$$\ddot{w} + 2\dot{w} + 3w = 0, \text{ cerchiamo soluzioni del tipo } w(t) = e^{\lambda t}$$
$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 2\lambda e^{\lambda t} + 3e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

la sol. generale dell'eq. omogenea è $w(t) = c_1 e^{-t+i\sqrt{2}t} + c_2 e^{-t-i\sqrt{2}t}$

$$\Rightarrow w(t) = e^{-t} \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{C}}}{c_1} e^{i\sqrt{2}t} + \underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{C}}}{c_2} e^{-i\sqrt{2}t} \right)$$

$$\Rightarrow w(t) = e^{-t} \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{R}}}{c_3} \cos(\sqrt{2}t) + \underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{R}}}{c_4} \sin(\sqrt{2}t) \right) \quad \star$$

la soluzione generale dell'eq. originaria, cioè $\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = -1$ si ottiene come $y = w + \bar{y}$ dove w è la sol. generale dell'omogenea associata e $\bar{y}$ è una sol. particolare; imponiamo che sia $\dot{\bar{y}} = 0$, allora

$$\cancel{\ddot{y}} + 2\cancel{\dot{y}} + 3\bar{y} = -1 \rightarrow \bar{y} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{3} + e^{-t} \left(c_3 \cos(\sqrt{2}t) + c_4 \sin(\sqrt{2}t) \right)$$

Per determinare c_3 e c_4 utilizzando le cond. iniziali, cioè

$$\begin{cases} y(0) = -\frac{1}{3} + c_3 = 1 \\ \dot{y}(0) = -e^{-t}(c_3 \cos(\sqrt{2}t) + c_4 \sin(\sqrt{2}t)) + e^{-t}(-c_3 \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) + c_4 \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t)) \Big|_{t=0} = -c_3 + \sqrt{2}c_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_3 = 4/3 \\ \sqrt{2} c_4 = 2 + 4/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 4/3 \\ c_4 = \frac{5\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

Oss.: $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -1/3$ -

————— o —————

Come si risolve "in generale" $ay'' + by' + cy = f(x)$
 nell'incognita $y(x)$? Si tratta di sommare alla sol.
 generale $w(x)$ dell'omogenea associata (cioè $aw'' + bw' + cw = 0$)
 una sol. particolare $\bar{y}$ t.c. $a\bar{y}'' + b\bar{y}' + c\bar{y} = f(x)$.
 Le sol. particolari si possono trovare per variazione delle
 costanti c_1 e c_2 (t.c. $w(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ dove λ_1 e λ_2 sono sol.

dell'eq. caratteristica $ad^2 + bd + c = 0$).

Il metodo di variazioni delle costanti, qui, è di tipo generale ma tecnicamente difficile.

Un altro metodo è "per somiglianza", l'abbiamo già applicato quando $f(x)$ è costante (cioè $f'(x) = 0$), perché abbiamo cercato $\bar{y}(x) = \text{costante}$ (soluzione stazionaria).

In altri contesti, ad esempio, se $f(x)$ è polinomiale si cerca $\bar{y}(x)$ polinomiale, se $f(x)$ è esponenziale si cerca $\bar{y}(x)$ che è esponenziale; se $f(x)$ è trigonometrico, si cerca $\bar{y}(x)$ che è trigonometrico.

Esempio (2^a metà della sezione 3.6): oscillazioni forzate
 $\ddot{x} + \omega^2 x = B \cos(\Omega t)$ Ω vel. ang. fissata ω t.c. $\omega^2 = \frac{k}{m}$ costante.

Eq. omogenea associata $\ddot{w} + \omega^2 w = 0 \Rightarrow w(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

con A e φ parametri da ricordare con le condizioni iniziali

Cerchiamo una sol. particolare $\bar{x}$ t.c. $\ddot{\bar{x}} + \omega^2 \bar{x} = B \cos(\Omega t)$,

proviamo con $\bar{x} = C \cos(\Omega t) \Rightarrow -C \Omega^2 \cos(\Omega t) + \omega^2 C \cos(\Omega t) = B \cos(\Omega t)$

$$\Rightarrow -C \Omega^2 + C \omega^2 = B \Rightarrow C = \frac{B}{\omega^2 - \Omega^2}$$

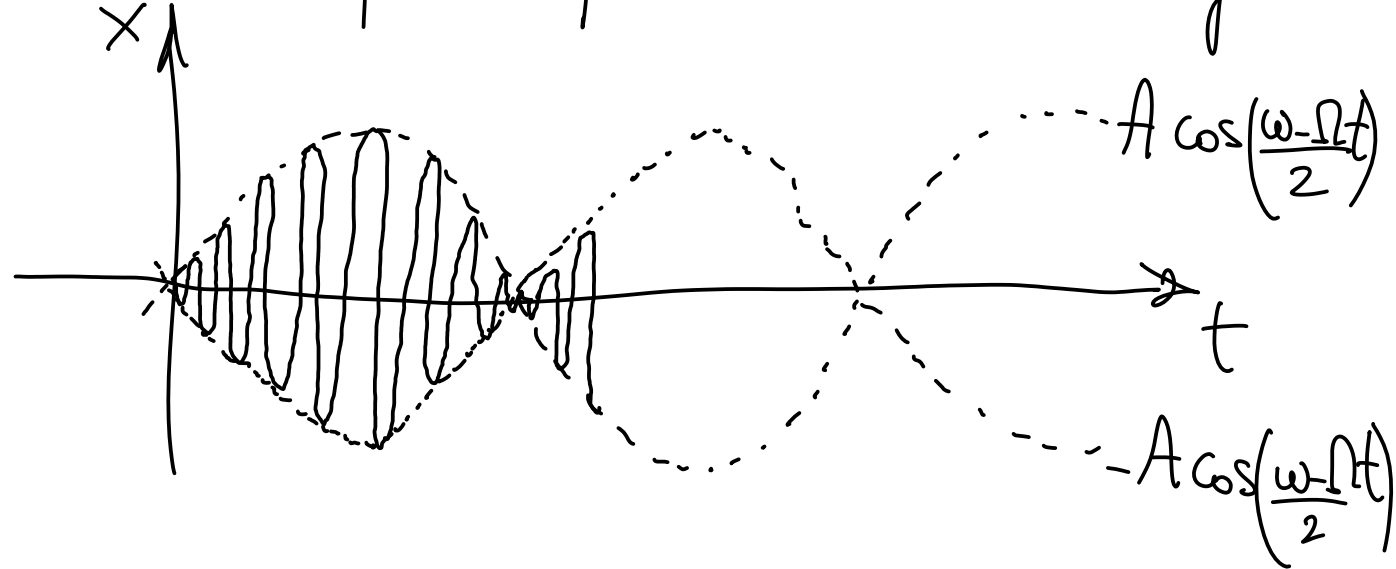
la sol. generale è del tipo $x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) + \frac{B}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$
quando $|\omega| \neq |\Omega|$

Applicando le formule di prostaferesi (cioè del tipo $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

etc.) si può esprimere $x(t) = A \cos\left(\frac{\omega - \Omega}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \Omega}{2} t + \psi\right)$,
quindi $x(t)$ è prodotto di due funzioni periodiche una di periodo $\frac{4\pi}{\omega - \Omega}$ e l'altra di $\frac{4\pi}{\omega + \Omega}$ e fase iniziale ψ

periodo $\frac{4\pi}{\omega + \Omega}$. Se $\omega \simeq \Omega$ il primo periodo è molto lungo

e il grafico è del tipo



Esercizio 18

Reagenti: A B

X $\swarrow$ sostanza prodotta

Concentrazioni: $a-x$ $b-x$ $x(t)$

$x(t)$ soddisfa all'eq. $\dot{x} = k(a-x)(b-x)$; $x(0) = 0$.

dove a e b sono le concentrazioni iniziali di A e B ($a, b, k \in \mathbb{R}_+$)

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x) \cdot (b-x) \Rightarrow \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int k dt + c \Rightarrow \frac{1}{b-a} \left(\int \frac{dx}{a-x} - \int \frac{dx}{b-x} \right) = kt + c$$

dove abbiamo sfruttato che

$$\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} = \frac{b-x-a+x}{(a-x)(b-x)} = \frac{b-a}{(a-x)(b-x)}$$

$$\frac{1}{b-a} \left(-\log(a-x) + \log(b-x) \right) = kt + c$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{b-x}{a-x}\right) = (b-a)(kt+c) \Rightarrow \frac{b-x}{a-x} = e^{(b-a)kt} \cdot \underbrace{e^{(b-a)c}}_{\text{costante la chiamo } c_1}$$

$$\Rightarrow b-x = (a-x) \cdot c_1 e^{(b-a)kt} \Rightarrow b - ac_1 e^{(b-a)kt} = x(1 - c_1 e^{(b-a)kt})$$

$$\Rightarrow x = \frac{b - ac_1 e^{(b-a)kt}}{1 - c_1 e^{(b-a)kt}} \quad \text{quando } b < a \text{ allora } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = b$$