

$\Rightarrow$ Studiamo $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Caso con $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, allora $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

la soluzione generale dell'eq. diff. $ay'' + by' + c = 0$ è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Oss.: se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_-$ allora $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

se $\lambda_1 \in \mathbb{R}_-$ e $\lambda_2 \geq 0$ allora $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c_2 e^{\lambda_2 x}$

Caso con $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, allora $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

la soluz. di $ay'' + by' + cy = 0$ è

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x + i\beta x} + c_2 e^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x} (c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x})$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, ma $c_2 = \bar{c}_1$ (poiché $c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x} \in \mathbb{R}$),

$$\begin{aligned} \text{quindi } c_1 (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) + \bar{c}_1 (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)) &= \\ &= c_3 \cos(\beta x) + c_4 \sin(\beta x) \text{ con } c_3 \text{ e } c_4 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere la soluzione come $y(x) = c_3 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_4 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Oss.: se $b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ allora $y(x) = c_3 \cos(\beta x) + c_4 \sin(\beta x)$
è una soluzione oscillante (esempio $m\ddot{x} + kx = 0$)

Oss.: se $b > 0$ allora $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Caso con $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a}$ quindi $y(x) = c_1 e^{\alpha x}$

Cerchiamo altre soluzioni per variazione delle costanti, quindi studiamo

$$\begin{aligned}
 ay'' + by' + cy &= a(c_1(x)e^{\alpha x})'' + b(c_1(x)e^{\alpha x})' + c(c_1(x)e^{\alpha x}) = \\
 &= a c_1''(x)e^{\alpha x} + 2a c_1'(x)\alpha e^{\alpha x} + a\alpha^2 c_1(x)e^{\alpha x} + b c_1'(x)e^{\alpha x} + b c_1(x)\alpha e^{\alpha x} + c c_1(x)e^{\alpha x} = \\
 &= a c_1''(x)e^{\alpha x} + \underbrace{c_1'(x) \cdot (2a\alpha + b)}_{2a(-\frac{b}{2a}) + b = 0} + \underbrace{(a\alpha^2 + b\alpha + c)c_1(x)}_{=0}
 \end{aligned}$$

$$2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b = 0$$

"0 perché α è radice
di $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$$= a e^{\alpha x} c_1''(x) = 0 \Rightarrow c_1''(x) = 0 \Rightarrow c_1'(x) = \text{cost.}$$

$$\Rightarrow c_1(x) = \text{cost.} \cdot x + \text{cost.} \underset{\text{diverse}}{=} c_2 x + c_3 \quad \text{con } c_2 \text{ e } c_3 \text{ costanti } i \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y(x) = (c_2 x + c_3) e^{-\frac{b}{2a}x}$$

Esempi: in $\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$ con $\omega^2 = \frac{k}{m} > 0$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Cerchiamo soluz. del tipo $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = c_1 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + \bar{c}_1 (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))$$

$$= c_3 \cos(\omega t) + c_4 \sin(\omega t)$$

$$= \sqrt{c_3^2 + c_4^2} \left(\frac{c_3}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}} \cos(\omega t) + \frac{c_4}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}} \sin(\omega t) \right)$$

$$= A \left(\cos \varphi \cos(\omega t) - \sin \varphi \sin(\omega t) \right),$$

dove $A = \sqrt{c_3^2 + c_4^2}$ e φ è t.c., $\cos \varphi = \frac{c_3}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}$, $\sin \varphi = \frac{-c_4}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}$,

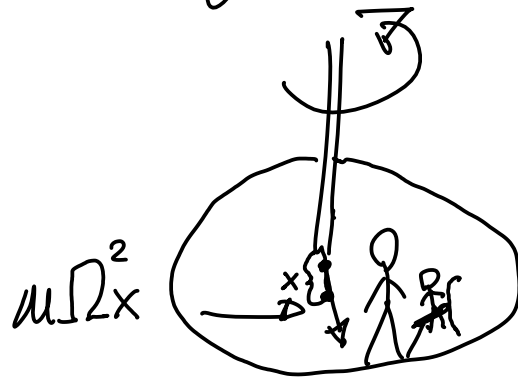
$\Rightarrow x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ periodica di periodo T . $\omega T = 2\pi$
 $\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$ vel. ang.
 ampiezza oscillazione fase iniziale

Repulsore armonico $m\ddot{x} = kx$ (con m, k positive)

poniamo $\Omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \ddot{x} = \Omega^2 x \rightarrow \ddot{x} - \Omega^2 x = 0$

l'eq. caratteristica diventa $\lambda^2 - \Omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \Omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm \Omega$ (con $\Omega \in \mathbb{R}_+$)

$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{\Omega t} + c_2 e^{-\Omega t}$ Oss. $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c_1 e^{\Omega t}$



Oscillatore armonico smorzato:

$$m\ddot{x} = -kx - 2\eta\dot{x} \quad \text{con } 2\eta > 0 \text{ (coef. di attrito)}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + 2\eta\dot{x} + kx = 0 \quad \text{cerchiamo sol. del tipo } e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow m\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\eta\lambda e^{\lambda t} + k e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow e^{\lambda t}(m\lambda^2 + 2\eta\lambda + k) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - mk}}{m}$$

Caso di forte smorzamento $\eta^2 - mk > 0 \Rightarrow \eta > \sqrt{mk}$, allora $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}_-$,

poiché $\eta > \sqrt{\eta^2 - mk} \Rightarrow 0 > \underbrace{-\eta + \sqrt{\eta^2 - mk}}_{\in \mathbb{R}_-}$

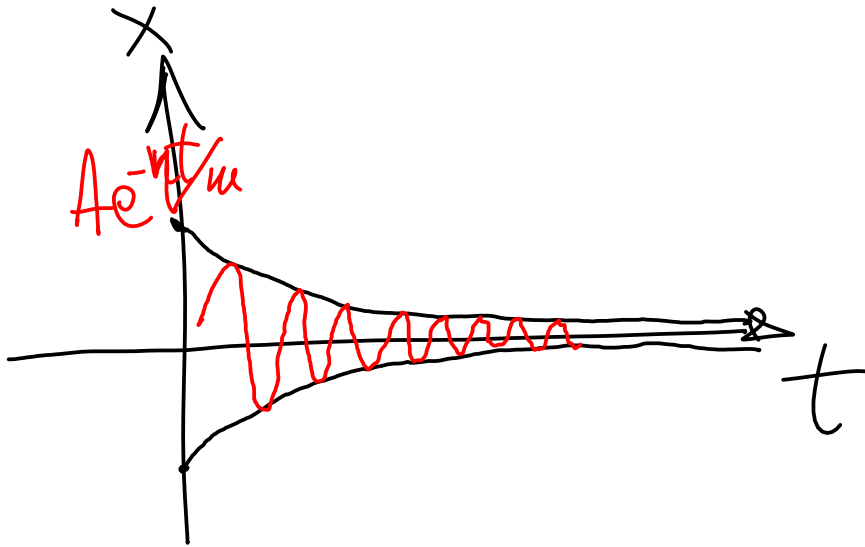
$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

Caso debole smorzamento $\eta^2 - mk < 0$

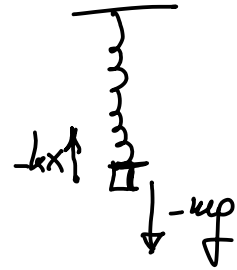
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\eta \pm i\sqrt{mk - \eta^2}}{m} = -\alpha \pm i\beta$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{La soluz. è del tipo } x(t) &= e^{-\alpha t} \cdot (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \\ &= e^{-\frac{\eta t}{m}} \cdot \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{mk - \eta^2}}{m} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{mk - \eta^2}}{m} t\right) \right) \\ &= e^{-\frac{\eta t}{m}} \cdot \underbrace{(A \cos(\beta t + \varphi))}_{\text{è di periodo } T = \frac{2\pi}{\beta}}\end{aligned}$$



Passiamo alle eq. diff. ordinarie del 2° ordine complete
(a coeff. costanti) del tipo $ay'' + by' + cy = d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Esempio: oscillatore armonico pesante



$$m\ddot{z} = -kz - mg$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \omega^2 z + g = 0 \Rightarrow \text{omogenea associata è } \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$
$$\Rightarrow x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Cerco una soluz. del prob. di partenza, cioè w.t.c.

$$\dot{w} + \omega^2 w + g = 0 \quad (\text{la cerco } \dot{w} = 0) \Rightarrow \omega^2 w + g = 0$$

Soluzione del prob. di partenza

$$\Rightarrow w = -\frac{g}{\omega^2} = -\frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow z(t) = A \cos(\omega t + \varphi) - \frac{mg}{k}$$