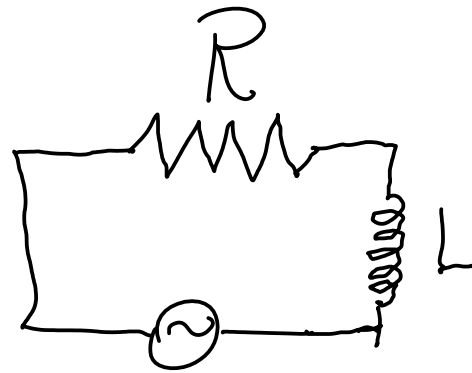


Esercizio 12

Risolvere l'eq. $L \dot{I} = -RI + A \sin(\omega t)$



Risolviameo innanzitutto l'eq. omogenea $L \dot{I} = -RI$

$$\Rightarrow \dot{I} = -\frac{R}{L} I \Rightarrow I(t) = c e^{-\frac{R}{L}t}$$

Risolviameo ora l'eq. di partenza con il metodo della variazione delle costanti, cioè cerchiamo una sol. del tipo $I(t) = c(t) e^{-\frac{R}{L}t}$, allora $L \frac{d}{dt} (c(t) e^{-\frac{R}{L}t}) = -R c(t) e^{-\frac{R}{L}t} + A \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow L \dot{c} e^{\frac{R}{L}t} + \cancel{L c(t) \left(-\frac{R}{L}\right) e^{-\frac{R}{L}t}} = -R c(t) e^{-\frac{R}{L}t} + A \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \dot{c} = \frac{A}{L} \sin(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow c(t) = \int dt \frac{A}{L} \underbrace{\sin(\omega t)}_{f(t)} \underbrace{e^{\frac{R}{L}t}}_{g'(t)} \Rightarrow g(t) = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t}$$

$$c(t) = \frac{A}{L} \sin(\omega t) \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} - \frac{A}{L} \cdot \frac{L}{R} \omega \int dt \underbrace{\cos(\omega t)}_{f(t)} \underbrace{e^{\frac{R}{L}t}}_{g'(t)} \Rightarrow g(t) = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t}$$

$$c(t) = \frac{A}{R} \sin(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} - \frac{A}{R} \omega \frac{L}{R} \cos(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} + \frac{A}{R} \omega^2 \frac{L}{R} \int dt (-\sin(\omega t)) e^{\frac{R}{L}t}$$

$$\Rightarrow dA = \frac{A}{L} \int dt \sin(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} = \frac{A}{R} \sin(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} - \frac{AL\omega}{R^2} \cos(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} - \frac{AL\omega^2}{R^2} \int dt \sin(\omega t) e^{\frac{R}{L}t}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{L} \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right) \int dt \sin(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} = \frac{A}{R} \sin(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} - \frac{AL\omega}{R^2} \cos(\omega t) e^{\frac{R}{L}t}$$

$$\Rightarrow c(t) = \left(\frac{A}{R} \sin(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} - \frac{AL\omega}{R^2} \cos(\omega t) e^{\frac{R}{L}t} \right) \cdot \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow I(t) = \left(\frac{A}{R} \sin(\omega t) e^{-\frac{Rt}{L}} - \frac{AL\omega \cos(\omega t) e^{-\frac{Rt}{L}}}{R^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \right)^{-1} + C e^{-\frac{R}{L}t}$$

— 0 —

Equazioni lineari del 2° ordine $\left(m \ddot{x} = -\frac{dU}{dx} \right)$

Studiamo eq. del tipo:

$$a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = f(x)$$

Proposizione: La soluzione generale dell'eq. più sopra è data dalla somma $\bar{y}(x) + w(x)$ dove w è soluzione ^{generale} dell'eq. omogenea associata cioè $a(x)w'' + b(x)w' + c(x)w = 0$ e $\bar{y}$ è una soluz. particolare dell'eq. di partenza, cioè $a(x)\bar{y}'' + b(x)\bar{y}' + c(x)\bar{y} = f(x)$

Verifica: Sia $y(x)$ t.c. $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$, allora

$$\Rightarrow a(x)(y'' - \bar{y}'') + b(x)(y' - \bar{y}') + c(x)(y - \bar{y}) = 0$$

$$\Rightarrow w(x) = y - \bar{y}, \text{ allora } a(x)w'' + b(x)w' + c(x)w = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = w(x) + \bar{y}(x) \quad \text{C.V.D.}$$

— • —

Ricordiamo il th. di $\exists!$ delle soluz. del prob. di Cauchy, che (adattato alle eq. diff. del 2° ordine) dice che

se studiamo
un prob. di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = F(y, y', x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

con $F \in C^1$ in x, y, y'
allora $\exists!$ la soluzione
del problema di Cauchy in
un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
con $\delta > 0$.

$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ può essere espressa nella forma (normale) $y'' = F(x, y, y')$ perché $a(x) \neq 0$.

Proposizione: la soluzione generale dell'eq. diff. lineare omogenea del 2° ordine $a(x)w'' + b(x)w' + c(x)w = 0$ può essere scritta nella forma $w(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Verifica: per il th. di I! delle soluzioni del prob. di Cauchy

Sappiamo che $\exists w_1(x)$ e $w_2(x)$ soluzioni rispettivamente di

$$1^\circ \begin{cases} a(x)w_1'' + b(x)w_1' + c(x)w_1 = 0 \\ w_1(x_0) = 1 \\ w_1'(x_0) = 0 \end{cases}$$

$$2^\circ \begin{cases} a(x)w_2'' + b(x)w_2' + c(x)w_2 = 0 \\ w_2(x_0) = 0 \\ w_2'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Osservazione: $w_1(x)$ e $w_2(x)$ sono indipendenti tra di loro nel senso che $\nexists d_2$ t.c. $w_1(x) = d_2 w_2(x)$ è soluzione del 1° problema di Cauchy; analogamente $\nexists d_1$ t.c. $w_2(x) = d_1 w_1(x)$ è soluz. del 2° prob. di Cauchy.

Sia ora il prob. di $a(x)w'' + b(x)w' + c(x)w = 0$
 Cauchy ^{generale} per l'eq. diff. $\left\{ \begin{array}{l} w(x_0) = w_0 \\ w'(x_0) = w'_0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$ Poniamo $c_1 = w_0$
 omogenea e $c_2 = w'_0$

allora $w(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)$ è la soluz. di quel prob. di Cauchy.

In effetti, $a(x)(c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x))'' + b(x)(c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x))' + c(x)(c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)) =$
 $= c_1 a(x) w_1''(x) + c_2 a(x) w_2''(x) + c_1 b(x) w_1'(x) + c_2 b(x) w_2'(x) + c_1 c(x) w_1(x) + c_2 c(x) w_2(x) =$

$$= C_1 \textcircled{0} + C_2 \textcircled{0} = 0$$

Inoltre, $w(x_0) = C_1 w_1(x_0) + \cancel{C_2 w_2(x_0)} = C_1 \cdot 1 = C_1 = w_0$

$$w'(x_0) = \cancel{C_1 w_1'(x_0)} + C_2 w_2'(x_0) = C_2 \cdot 1 = C_2 = w_0'$$

————— o —————

Soluzione generale dell'eq. diff. ordinaria del 2° ordine omogenea e a coeff. costanti, cioè del tipo

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

(esempio: $m \ddot{x} = -kx$ eq. dell'oscillatore armonico)

cerchiamo soluz. del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$, quindi

$$a \lambda^2 e^{\lambda x} + b \lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = e^{\lambda x} (a \lambda^2 + b \lambda + c) = 0$$

$\Rightarrow$ dobbiamo risolvere l'eq. caratteristica associata, cioè $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

∃ 2 soluz. in $\mathbb{C}$ che chiamiamo λ_1 e λ_2 ,
allora se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ la soluz. generale dell'omogenea
è $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.