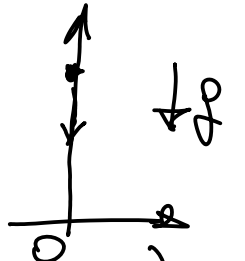


Esempio 2.7 (caduta di un grave in un fluido viscoso)

$$\ddot{x} = -g \Rightarrow \dot{v} = -g \quad (\text{caduta "libera" dei gravi})$$



$$\Rightarrow m\dot{v} = -mg - \lambda v \Rightarrow \dot{v} = -g - \frac{\lambda}{m}v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \frac{\lambda}{m}v$$

Forza di Stokes o dell'attrito viscoso

$$\Rightarrow \frac{dv}{-g - \frac{\lambda}{m}v} = dt \Rightarrow \frac{dv}{g + \frac{\lambda}{m}v} = -dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{g + \frac{\lambda}{m}v} = -\int dt + c \Rightarrow \frac{m}{\lambda} \int \frac{\frac{\lambda}{m} dv}{\boxed{g + \frac{\lambda}{m}v}} = -\int dt + c$$

$$\Rightarrow \frac{m}{\lambda} \log \left(g + \frac{\lambda}{m}v \right) = -t + c \Rightarrow \log \left| g + \frac{\lambda}{m}v \right| = -\frac{\lambda}{m}(t - c)$$

$$\Rightarrow g + \frac{\lambda}{m}v = e^{\left(-\frac{\lambda}{m}t + \frac{\lambda}{m}c\right)} \Rightarrow v = -\frac{mg}{\lambda} + \frac{m}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{m}t} \cdot \underbrace{\left(e^{\frac{\lambda}{m}c}\right)}_{=c^*}$$

Abbiamo ottenuto che la soluzione generale è della
forma $v(t) = -\frac{ug}{\lambda} + C^* \frac{u}{\lambda} e^{-\frac{\lambda t}{u}}$

Osserviamo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = -\frac{ug}{\lambda}$

Si raggiunge una vel. limite mentre in assenza di attrito

$v(t) = -gt + v_0$ che è illimitato per $t \rightarrow +\infty$.

————— 0 —————
Esempio 2.5: $y' = ay(1-by)$ con a, b costanti $\in \mathbb{R}_+$

$$\frac{dy}{dx} = ay(1-by) \Rightarrow \frac{dy}{ay(1-by)} = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{ay(1-by)} = \int dx + C \quad \left| \begin{array}{l} \text{Osservo che} \\ \frac{a}{ay} + \frac{b}{1-by} = \frac{a - \cancel{aby} + \cancel{aby}}{ay(1-by)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \int dy \left(\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}y} + \frac{b}{1-by} \right) = x + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \int dy \frac{1}{y} - \frac{1}{a} \int dy \frac{1}{-\frac{1}{b} + y} = x + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \left(\log(y) - \log\left(y - \frac{1}{b}\right) \right) = x + C$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{y}{y - \frac{1}{b}}\right) = a(x + C) \Rightarrow \frac{y}{y - \frac{1}{b}} = e^{a(x+C)}$$

$$\Rightarrow y = y e^{a(x+c)} - \frac{1}{b} e^{ax+c} \Rightarrow y(e^{a(x+c)} - 1) = \frac{1}{b} e^{a(x+c)}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{e^{a(x+c)}}{b(e^{a(x+c)} - 1)} = \frac{1}{b(1 - e^{-a(x+c)})}$$

Risolvere i prob. di Cauchy

$$(A) \begin{cases} y' = y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Caso (A): $y^2 = 0$ quando $y = 0$ e $y = 0$ risolve $y' = y^2$
 inoltre $y(1) = 0$ è consistente con $y = 0 \Rightarrow y(x)$ è l'unica soluzione di (A).

$$\text{Caso (B)}: \frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dx + C$$

$$\Rightarrow -y^{-1} = x + C \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{x+C}$$

$$\text{Siccome } y(0)=1 \text{ allora } y(0)=1 = \frac{-1}{C} \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x-1} \text{ è soluzione del problema di Cauchy (B).}$$

— o —

Equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine
lineari, cioè del tipo $y' + a(x)y = f(x)$

Def.: diciamo che $w' + a(x)w = 0$ è l'equazione omogenea

associata a $y' + a(x)y = f(x)$

Proposizione: La soluzione generale dell'eq. $y' + a(x)y = f(x)$ è data dalla somma di una particolare soluzione dell'eq. di partenza più quella generale dell'equazione associata.

Verifica: supponiamo che $\bar{y}(x)$ è una particolare soluz., cioè $\bar{y}' + a(x)\bar{y} = f(x)$, allora $\forall$ altra soluz. dell'eq. (cioè $y' + a(x)y = f(x)$)

$$\text{Si ha che } \bar{y}' + a(x)\bar{y} - (y' + a(x)y) = \cancel{f(x)} - \cancel{f(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{y}' - y' + a(x)(\bar{y} - y) = 0, \text{ quindi } w(x) = \bar{y}(x) - y(x) \text{ è}$$

$$\text{soluzione dell'eq. } w' + a(x)w = 0$$

$$\Rightarrow \text{Se } w \text{ è soluz. dell'eq. omogenea associata allora } y(x) = \bar{y}(x) - w(x)$$

è soluz. di $y'(x) + a(x)y = f(x)$ -

Studio dell'eq. lineare omogenea associata

$$w' + a(x)w = 0 \quad \text{Poniamo } A(x) = \int dx a(x)$$

e moltiplichiamo ambo i membri per $e^{A(x)}$

$$e^{A(x)} w' + a(x) e^{A(x)} w = 0$$

$$\text{Osservo che } \frac{d}{dx} \left(e^{A(x)} w(x) \right) = e^{A(x)} \cdot A'(x) w(x) + e^{A(x)} w'(x) =$$

$$= e^{A(x)} w' + a(x) e^{A(x)} w = 0$$

$$\Rightarrow e^{A(x)} w(x) = c \Rightarrow w(x) = c e^{-A(x)} \text{ è la sol. generale dell'omogenea}$$

Dobbiamo ora cercare una soluzione particolare di

$$y' + a(x)y = f(x),$$

la cerco del tipo $\bar{y}(x) = c(x)e^{-A(x)}$, quindi imponiamo che

$$(c(x)e^{-A(x)})' + a(x)c(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

$$\Rightarrow c'(x)e^{-A(x)} - \cancel{c(x)a(x)e^{-A(x)}} + \cancel{a(x) \cdot c(x)e^{-A(x)}} = f(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = f(x) \cdot e^{A(x)} \Rightarrow c(x) = \int dx f(x) \cdot e^{A(x)}$$

la soluzione particolare è $\bar{y}(x) = e^{-A(x)} \int dx f(x) e^{A(x)}$

$\Rightarrow$ la soluzione generale è $y(x) = c e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int dx f(x) e^{A(x)}$

Consideriamo un problema di Cauchy del tipo

$$y' + a(x)y = f(x)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

allora la soluzione è

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x ds a(s)} + e^{-\int_{x_0}^x ds a(s)} \int_{x_0}^x ds f(s) A(s)$$

Cioè $-A(x) + A(x_0)$

Esempio 2.9 (Circuito con una resistenza e una capacità):

$u(t)$ differenza di potenziale, l'eq. è

$$CR \dot{u} + u = E$$

Capacità

Resistenza

Forza elettromotrice

Risolviamo $CR \dot{w} + w = 0 \Rightarrow \dot{w} = -\frac{w}{CR} \Rightarrow w(t) = c e^{-\frac{t}{CR}}$

Cerchiamo una soluzione particolare di $CR\ddot{u} + \bar{u} = \bar{F}$, proviamo
con la soluzione del tipo $\dot{\bar{u}} = 0 \Rightarrow \bar{u} = \bar{F}$.

$\Rightarrow$ la soluz. generale è $u(t) = w(t) + \bar{u} = c e^{-\frac{t}{CR}} + \bar{F}$