

Equazioni differenziali ordinarie

Esempio (oscillato): $m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$ dove $U = U(x)$

che sa risolto nell'incognita $x(t)$ -

dall'eq. di Newton segue $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E$

Def.: Si dice che

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

è un'eq. diff. ordinaria di ordine n (nell'incognita $y = y(x)$)

Def. diciamo che una funz. $y(x)$ è soluzione dell'eq. diff. ord. quando $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

Se riusciamo ad esprimere tutte le soluzioni dell'eq. diff. nella forma $y = y(x; c_1, \dots, c_m) = y(x; \underline{c})$ (dove $c_1, \dots, c_m$ sono parametri) cioè $F(x, y(x; \underline{c}), y'(x; \underline{c}), \dots, y^{(n)}(x; \underline{c})) = 0$ allora diciamo $y(x; \underline{c})$ è la soluzione generale dell'eq. - diff. ord.

Sia $N(t)$ il numero di individui di una popolazione in funzione del tempo, la cui evoluzione è del tipo

$$N(t+h) = N(t) + (\lambda N(t)) \cdot h - (\mu N(t)) \cdot h$$

dove λ è il tasso di natalità e μ è il tasso di mortalità

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = \dot{N}(t) = (\lambda - \mu) \cdot N(t) \quad \text{eq. di evoluzione della popolazione}$$

La cui soluzione è $N(t) = N_0 e^{(1-\mu)t}$ dove $N_0 = N(0)$

Def.: $F(x, y, y')$ è un'eq. diff. ord. del 1° ordine

Def.: quando $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ si può scrivere nella forma $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ allora si dice che è esprimibile in forma normale.

Def.: chiamiamo problema di Cauchy il seguente

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{array} \right\} \text{ costanti in } \mathbb{R}$$

Condizioni iniziali

Esempio (la caduta dei gravi): $\begin{cases} \ddot{z} = -g \\ z(0) = z_0 \\ \dot{z}(0) = v_0 \end{cases}$



la cui soluzione è

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$$

Teorema [di I! della soluz. del prob. di Cauchy]:

Sia f continua ^{e derivabile} in un intorno di x_0 e di $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$
allora esiste una e una sola soluzione del problema
di Cauchy in un intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$
(cioè la soluz. $y: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$) -

Eq. diff. del 1° ordine a variabili separabili.

Esse sono del tipo $y' = a(x)b(y)$

$\Rightarrow$ Oss. se $\exists y^*$ t.c. $b(y^*) = 0$ allora $y(x) = y^*$ (costante)
è soluzione poiché $0 = y'(x) = \frac{d}{dx} y^* \stackrel{!}{=} a(x)b(y^*) = 0$

Sia ora $b(y) \neq 0$, allora

$$y' = a(x)b(y) \Rightarrow \frac{y'}{b(y)} = a(x) \quad \left(\text{cioè } \frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x) \right)$$

Integrando entrambe le eq. $\int \frac{dx y'(x)}{b(y(x))} = \int dx a(x) + C$

ma $y'(x) dx = dy$, quindi sostituisco usando y come var. di integraz.,

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{b(y)} = \int dx a(x) + c$$

(chiamiamo $B(y)$ la primitiva di $1/b(y)$ e $A(x)$ la primitiva di $a(x)$, allora otteniamo

$$B(y) = A(x) + c \Rightarrow y(x) = B^{-1}(A(x) + c)$$

dove B^{-1} è l'inverso di $B(y)$.

Ricordare il procedimento

per separazioni di variabili è facile:

$$y'(x) = a(x) \cdot b(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a(x) \cdot b(y) \Rightarrow \frac{dy}{b(y)} = a(x) dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x) dx + c$$

Esempi:

$$(0) y' = f(x) \Rightarrow \int dy = y = \int f(x) dx + c$$

$$(1) \dot{N}(t) = (\lambda - \mu) N(t) \Rightarrow \frac{dN}{dt} = (\lambda - \mu) \cdot N \Rightarrow \frac{dN}{N} = (\lambda - \mu) \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int (\lambda - \mu) \cdot dt + c \Rightarrow \log N = (\lambda - \mu) \cdot t + c$$

$$\Rightarrow N = e^{(\lambda - \mu) \cdot t} \cdot \underbrace{e^c}_{= N_0} = N_0 e^{(\lambda - \mu)t}$$

osservo che al tempo $t=0$
 $N(t) = N_0 e^{(\lambda - \mu) \cdot 0} = N_0$

Esempio 2.1

Risolvere $\begin{cases} yy' = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 1/y \\ y(0) = 2 \end{cases} \leftarrow \text{perché } y \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1/y \Rightarrow y dy = dx \Rightarrow \int y dy = \int dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = x + c \Rightarrow y^2 = 2(x + c) \quad \text{se } x \geq -c \Rightarrow y = \pm \sqrt{2(x+c)}$$

$$\Rightarrow y(0) = \pm \sqrt{2(x+c)} \Big|_{x=0} = \pm \sqrt{2c} = 2 \Rightarrow c = 2 \text{ e scarto quella negativa}$$

$$\Rightarrow y(x) = \sqrt{2x+4}$$

Esempio 2.7 (caduta di un gravo in un fluido viscoso)

$$\ddot{x} = -g \Rightarrow \dot{v} = -g \quad (\text{caduta "libera" dei gravi})$$

$$\Rightarrow m\dot{v} = -mg - \lambda v \Rightarrow \dot{v} = -g - \frac{\lambda}{m}v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \frac{\lambda}{m}v$$

Forza di Stokes o dell'attrito viscoso

$$\Rightarrow \frac{dv}{-g - \frac{\lambda}{m}v} = dt \Rightarrow \frac{dv}{g + \frac{\lambda}{m}v} = -dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{g + \frac{\lambda}{m}v} = -\int dt + c \Rightarrow \frac{m}{\lambda} \int \frac{\frac{\lambda}{m} dv}{\boxed{g + \frac{\lambda}{m}v}} = -\int dt + c$$

$$\Rightarrow \frac{m}{\lambda} \log \left(g + \frac{\lambda}{m}v \right) = -t + c \Rightarrow \log \left| g + \frac{\lambda}{m}v \right| = -\frac{\lambda}{m}(t - c)$$
$$\Rightarrow g + \frac{\lambda}{m}v = e^{-\frac{\lambda}{m}t + c} \Rightarrow v = -\frac{mg}{\lambda} + \frac{m}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{m}t - \frac{\lambda}{m}c}$$