

$z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è la forma
algebrica di $z \in \mathbb{C}$.

Risolviamo

$$z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

Osserviamo che $1 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = \left(\operatorname{Re} \left(\frac{z}{|z|} \right) \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \left(\frac{z}{|z|} \right) \right)^2$

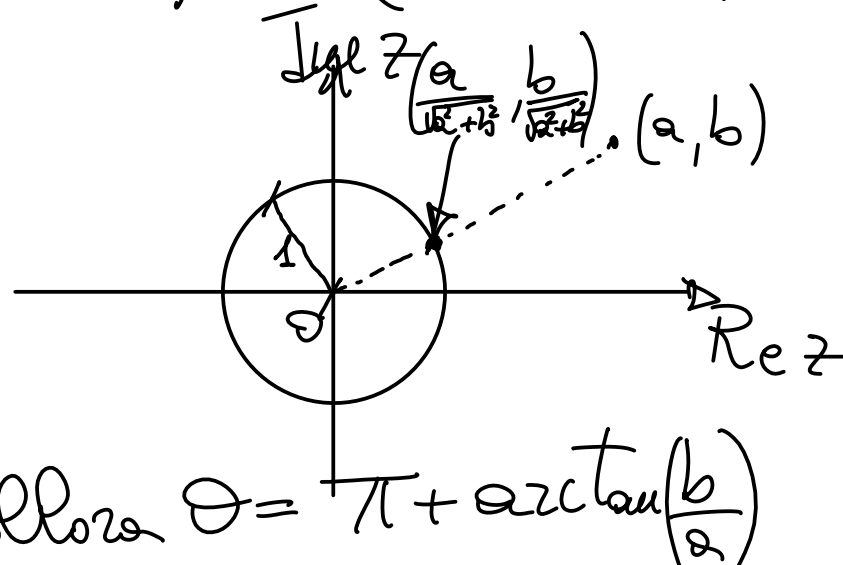
$\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ t.c.

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

se $a \geq 0$, allora

$$\theta = \arctan \frac{b}{a}$$

se $a < 0$ allora $\theta = \pi + \arctan \left(\frac{b}{a} \right)$



Scriviamo z in forma trigonometrica prendendo

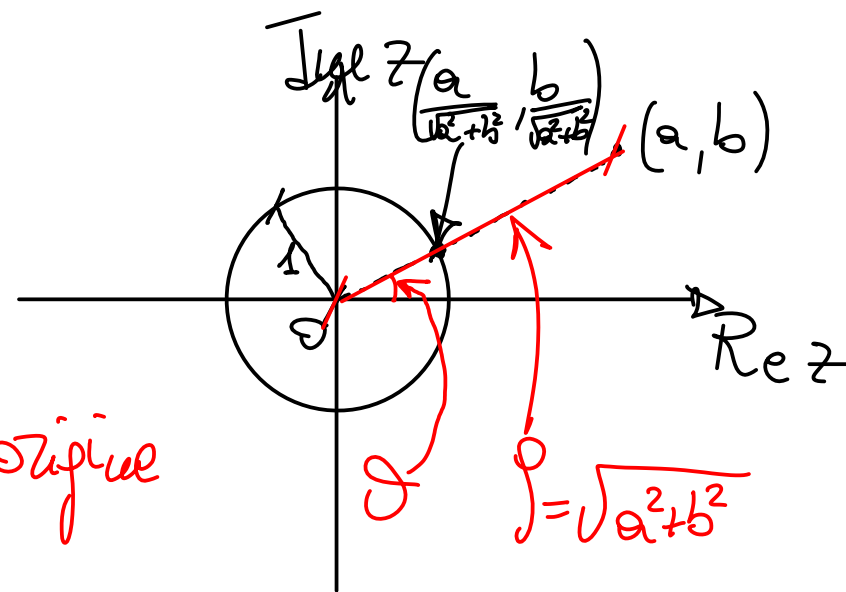
$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{dove } \theta \text{ è determinato come}$$

detto prima e $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

abbiamo quindi scritto

$$(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

dove ρ è la distanza di (a, b) dall'origine



coordinate polari

Ricordando (la formula di Eulero, cioè) $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
possiamo scrivere z in forma esponenziale, cioè $z = \rho e^{i\theta}$

Proposizione [formule di De Moivre (= "de muar")]:

Siano $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ allora il prodotto di z_1 e z_2 è $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, mentre la divisione darà come risultato $z_1 / z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$; infine la potenza n -esima è tale che $(z_1)^n = \rho_1^n e^{in\theta_1} \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema: Sia $w = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ allora $\forall n \in \mathbb{N}$

∃ n radici n -esime di w distinte tra loro in $\mathbb{C}$, esse sono

$$z_j = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta + 2j\pi}{n}\right)} \quad \text{con } j = 0, 1, \dots, n-1$$

Osserviamo che
 $\theta_j \neq \theta_\ell$ se $j \neq \ell$.

Infatti, $(z_i)^n = \left(\rho^{1/n}\right)^n e^{i\left(\frac{\theta+2j\pi}{n}\right) \cdot n} = \rho^{1/n \cdot n} \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i(2j\pi)} = \rho e^{i\theta} \underbrace{\left(\cos(2j\pi) + i\sin(2j\pi)\right)}_{=1} = \rho e^{i\theta} = w$

Teorema: Sia $P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ un polinomio di grado n (cioè $a_n \neq 0$) a coefficienti complessi (cioè $a_j \in \mathbb{C} \forall j=0, \dots, n$) allora l'eq. $P_n(z) = 0$ ammette n soluzioni in $\mathbb{C}$.

Esempio: $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$
 Se $b^2 - 4ac < 0$ allora scrivete $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

Esercizio 8.4 (cap. 1)

Si risolve (in $\mathbb{C}$) l'eq. $z^3 = |z|$

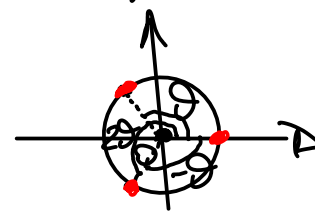
$$\text{Poniamo } z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \rho^3 e^{i3\theta} = \rho \Rightarrow \rho^3 e^{i3\theta} = \rho e^{i0}$$

Prattichiamo l'eq. sulla parte radiale e sulla parte angolare

$$\rho^3 = \rho$$

$$3\theta = 0 \bmod 2\pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^3 - \rho = 0 \rightarrow \rho(\rho^2 - 1) = 0 \rightarrow \rho^2 = 1 \rightarrow \rho = 1 \text{ (perché } \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ quindi } \rho \geq 0) \\ 3\theta = 0 \bmod 2\pi \Rightarrow \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$



Le soluzioni saranno $z_1 = 0$, $z_2 = 1 \cdot e^{i0} = 1$, $z_3 = 1 \cdot e^{i2\pi/3}$, $z_4 = 1 \cdot e^{i4\pi/3}$

se le vogliamo in formato algebrico saranno:

$$z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1° es. del 1° es. del 2014? 2015? 2016?

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'eq. $8z^6 - 63z^3 - 8 = 0$

Poniamo $w = z^3 \Rightarrow 8w^2 - 63w - 8 = 0$

$$w_{1,2} = \frac{63 \pm \sqrt{63^2 + 4 \cdot 64}}{16} = \frac{63 \pm 65}{16} = \begin{cases} \frac{128}{16} = 8 \\ -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Dobbiamo risolvere $z^3 = \rho$ e $z^3 = -1/\rho$

$$\rho^3 e^{i3\theta} = \rho e^{i0}$$

$$\downarrow$$
$$\begin{cases} \rho^3 = \rho \Rightarrow \rho = 2 \\ 3\theta = 0 \pmod{2\pi} \Rightarrow \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$\downarrow$$
$$z_1 = 2e^{i0} = 2, z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_3 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\rho^3 e^{i3\theta} = \frac{1}{\rho} e^{i\pi} = \frac{\cos\pi + i\sin\pi}{\rho}$$

$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} \rho^3 = 1/\rho \\ 3\theta = \pi \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$\downarrow$$
$$\begin{cases} \rho = 1/2 \\ \theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$z_4 = \frac{1}{2} e^{i\pi/3}, z_5 = \frac{1}{2} e^{i\pi} = -\frac{1}{2}, z_6 = \frac{1}{2} e^{i5\pi/3}$$