

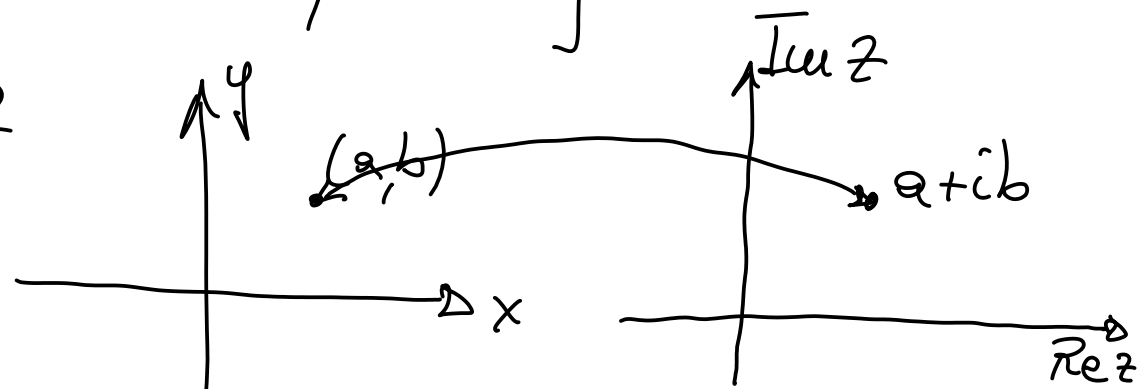
Numeri complessi

Def: diciamo che $z = a + ib$, dove i è l'unità immaginaria e $a, b \in \mathbb{R}$, è un numero complesso.

Si intende che $i^2 = -1$ ($i = \sqrt{-1}$).

Def.: l'insieme dei numeri complessi si denota con $\mathbb{C} = \{a + ib : \forall a, b \in \mathbb{R}\}$

Ovviamente $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$



Def.: Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$

$\text{Re}(z) = a, \text{Im}(z) = b$
 $\nearrow$ si legge "parte reale di" $\nwarrow$ si legge "parte immaginaria di"

Def.: Su $\mathbb{C}$ definiamo somma e prodotto nel modo seguente $\forall z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$:

$$z_1 + z_2 = a + c + i(b + d) \quad \text{e} \quad z_1 \cdot z_2 = a \cdot c - bd + i(ad + bc)$$

Oss. 1: Se $z_1 = i, z_2 = i$ allora $z_1 \cdot z_2 = i^2 = -1 + i \cdot 0$

Oss. 2: Se $z_1 = a \in \mathbb{R}, z_2 = c \in \mathbb{R}$, allora $z_1 \cdot z_2 = a \cdot c \in \mathbb{R}$

Oss. 3: Sia $z_1 = a + ib$ e $z_2 = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$, allora $\text{Re}(z_2) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \text{Im}(z_2) = \frac{-b}{a^2 + b^2}$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{b \cdot (-b)}{a^2+b^2} + i \left(\frac{a \cdot (-b)}{a^2+b^2} + \frac{a \cdot b}{a^2+b^2} \right) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

$$\Rightarrow (z_1)^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Def.: $\forall z = a+ib$ diciamo che il suo complesso coniugato è $\bar{z} = a-ib$

$$\text{Oss.: } z + \bar{z} = a + a + i(\cancel{b} - \cancel{b}) = 2a \in \mathbb{R}$$

$$z \cdot \bar{z} = a \cdot a - b \cdot (-b) + i(\cancel{a \cdot (-b)} + \cancel{a \cdot b}) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$$

Def.: Diciamo che $\forall z = a+ib \in \mathbb{C}$ il suo modulo è

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad (= \sqrt{z \cdot \bar{z}})$$

Propositione: $\mathbb{C}$ dotato di somma (+) e prodotto ($\cdot$) è un campo (non ordinato)

Verso la formula di Taylor.

Ricordiamo che (per Taylor-Maclaurin con resto di Lagrange)

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \cdot (x-x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ con } c \in (x_0, x)$$

Nel caso in cui $|f^{(j)}(x)| \leq M^j \quad \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in (a, b)$ e $M > 0$ allora

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c) (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\swarrow$
con $c \in (a, b)$

In questo caso possiamo scrivere $f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (x-x_0)^j$,
cioè abbiamo scritto f come serie di potenze.

Consideriamo 2 esempi classici di funzioni tali che
 $|f^{(j)}(x)| \leq M^j \quad \forall x \in \mathbb{R}$, cioè $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

Sia ora $f^{(0)}(x) = \cos(x)$, allora nel caso con $x_0 = 0$ abbiamo

$$f^{(0)}(x_0) = f^{(0)}(0) = 1; \quad f^{(1)}(x) = -\sin(x) \rightarrow f^{(1)}(0) = 0;$$

$$f^{(2)}(x) = -\cos(x) \rightarrow f^{(2)}(0) = -1; \quad f^{(3)}(x) = \sin(x) \rightarrow f^{(3)}(0) = 0; \quad f^{(4)}(x) = \cos(x) \dots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = 1 + \cancel{0 \cdot x} - \frac{x^2}{2!} + \cancel{0 \cdot \frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \cancel{0 \cdot \frac{x^5}{5!}} - \frac{x^6}{6!} + \cancel{0 \cdot \frac{x^7}{7!}} + \frac{x^8}{8!} + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} \end{aligned}$$

Sia ora $f^{(0)}(x) = \sin(x)$ (sempre espansa attorno a $x_0 = 0$):

$$f^{(0)}(0) = 0; f^{(1)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(1)}(0) = 1; f^{(2)}(x) = -\sin(x) \Rightarrow f^{(2)}(0) = 0;$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1; f^{(4)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0 \dots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \cancel{0} + x + \cancel{0 \cdot \frac{x^2}{2!}} - \frac{x^3}{3!} + \cancel{0 \cdot \frac{x^4}{4!}} + \frac{x^5}{5!} + \cancel{0 \cdot \frac{x^6}{6!}} - \frac{x^7}{7!} + \cancel{0 \cdot \frac{x^8}{8!}} + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} \end{aligned}$$

Sia ora $f(x) = e^x$, allora se espandiamo attorno a $x_0 = 0$ abbiamo $f^{(0)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(0)}(0) = 1 \Rightarrow f^{(1)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(1)}(0) = 1; \dots$

$$\Rightarrow g(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} g^{(j)}(0) \frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!}$$

Osservazione: formalmente abbiamo che

$$g(ix) = \sum_{j=0}^{+\infty} i^j \frac{x^j}{j!} \quad \text{Inoltre} \quad i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } j=0, 4, 8, 12, \dots \\ i & \text{se } j=1, 5, 9, 13, \dots \\ -1 & \text{se } j=2, 6, 10, 14, \dots \\ -i & \text{se } j=3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(ix) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{4j}}{(4j)!} + \sum_{j=0}^{+\infty} i \frac{x^{4j+1}}{(4j+1)!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)x^{4j+2}}{(4j+2)!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-i)x^{4j+3}}{(4j+3)!} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{4j}}{4j!} - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{4j+2}}{(4j+2)!} + i \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{4j+1}}{(4j+1)!} - i \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{4j+3}}{(4j+3)!} \end{aligned}$$

$$e^{ix} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

Formula di Eulero

Def: diciamo che un numero $z = a + ib$ è

scritto in forma esponenziale quando

$$z = \rho e^{i\vartheta} \text{ con } \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \vartheta \in \mathbb{R} \text{ (ma } e^{i\vartheta} \text{ è periodico di periodo } 2\pi)$$

Oss. Siano $z_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\vartheta_2}$ allora $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$