

Esercizio 4 del I Essayero 2016

Si discute la convergenza dell'integrale di Fresnel cioè
 $\int_0^{+\infty} dx \sin(x^2)$. Sappiamo che si discute la convergenza

di cui
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$

Siccome $\int_0^{+\infty} dx \sin(x^2) = \int_0^1 dx \sin(x^2) + \int_1^{+\infty} dx \sin(x^2)$

studiamo la convergenza del secondo.

Osserviamo che $\int_1^{+\infty} dx \sin(x^2) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \sin(t)$

dove abbiamo posto $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow \frac{dt}{2x} = dx \Rightarrow \frac{dt}{2\sqrt{t}} = dx$

Studiamo ora $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \sin(t) = \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2} t^{-1/2}}_{f(t)} \underbrace{\sin(t)}_{g'(t) \Rightarrow g(t) = -\cos(t)} =$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{t}} \cos(t) \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} dt \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{t^3}} \cos(t)$$

$\Rightarrow f'(t) = -\frac{1}{4} t^{-3/2}$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2\sqrt{t}} \cos(t) + \frac{1}{2} \cos(1) + \int_1^{+\infty} dt \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{t^{3/2}} \cos(t),$$

Studiamo ora parte $\int_1^{+\infty} dt \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{t^{3/2}} \cos(t)$

Proviamo a verificare la convergenza del seguente integrale:

$$\frac{1}{4} \int_1^{+\infty} dt \frac{|\cos(t)|}{t^{3/2}} \leq \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} dt \frac{1}{t^{3/2}} = \frac{1}{4} (-2) t^{-1/2} \Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 \right)$$

sto per applicare il th. del confronto

$$= \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Per il th. del confronto $\frac{1}{t} \frac{|\cos(t)|}{t^{3/2}}$ è integrabile su $[1, +\infty)$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^{3/2}} \cos(t)$ è integrabile su $[1, +\infty)$ (poiché è assolutamente integrabile).

Di conseguenza, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \sin(t) = \frac{1}{2} \cos(1) + \int_1^{+\infty} dt \left(-\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^{3/2}} \cos(t)$
è a sua volta integrabile e quindi converge anche $\int_0^{+\infty} dx \sin(x^2)$.

————— 0 —————

Serie numeriche (cenni).

Def.: diciamo che una serie numerica è il limite di una sommatoria per il numero di addendi che va a ∞ , cioè

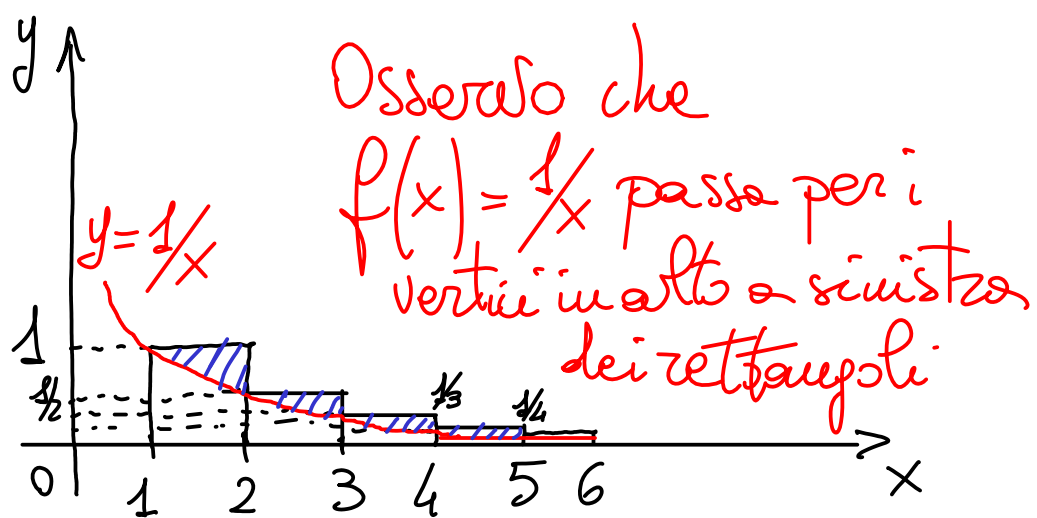
Si scrive che la serie è $\sum_{j=1}^{+\infty} a_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n a_j$ dove $\{a_j\}_{j \geq 1}$ è una successione,

o anche $\sum_{j=1}^{+\infty} a_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ con $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$.

Si consideri $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^\alpha}$ per $\alpha > 0$ si chiama la serie armonica generalizzata

Proposizione: $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \in \mathbb{R} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$

Verifica (nei casi $\alpha=1$, cioè serie armonica, e $\alpha=2$, cioè serie di Pappoli). Caso $\alpha=1$.



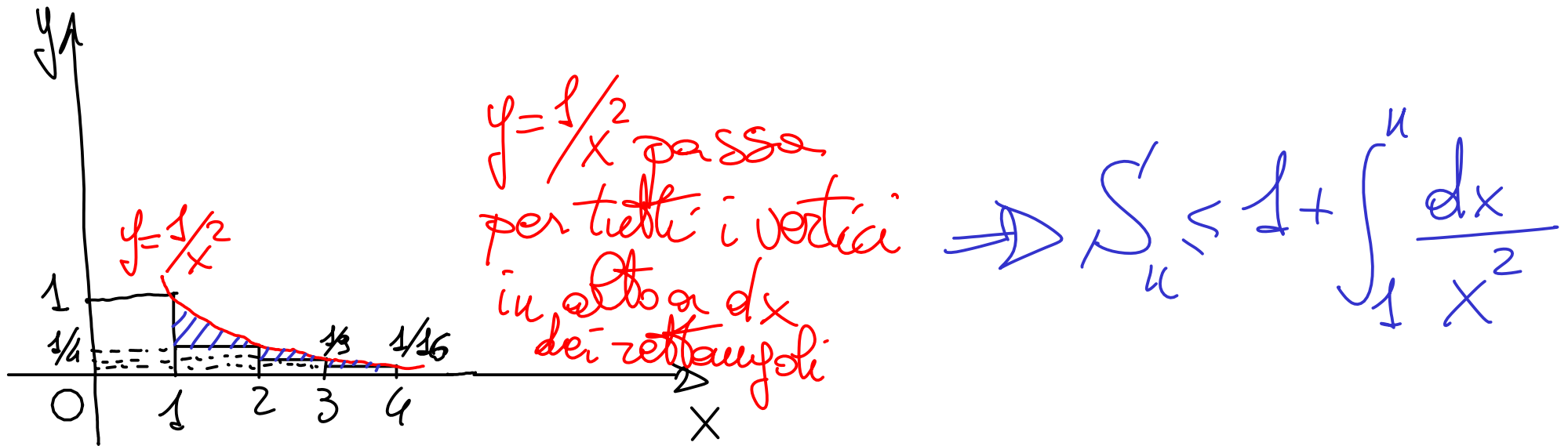
$$\Rightarrow \int_1^{n+1} dx \frac{1}{x} \leq S'_n \quad \left(\text{per differenza è la parte rettangolare in blu} \right)$$

$$S'_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

Di conseguenza, abbiamo che $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log x \Big|_1^{+\infty}$
 quindi (per il th del confronto per le successioni) $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}$ diverge

Caso $d=2$.

Ripetiamo "mutatis mutandis"



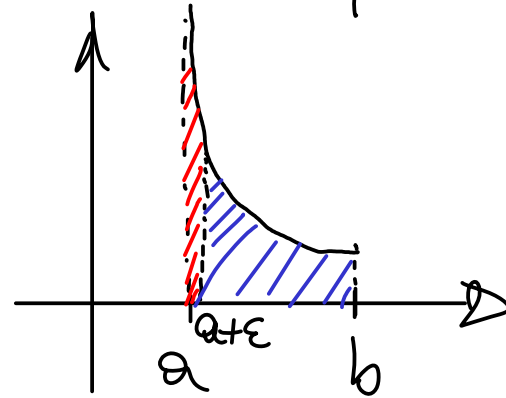
$$S'_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} \leq 1 - \frac{1}{x} \Big|_1^n = 1 + 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 2$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \text{ converge.}$$

Integrali di funzioni illimitate su intervalli
limitati (è tutto più o meno come prima)

$$\text{Def.: } \int_a^b dx f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b dx f(x)$$



Anche per questi integrali valgono i th. del confronto ^{e del} confronto
asintotico, cambia solo quanto segue

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha \geq 1 \\ \in \mathbb{R} & \text{per } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

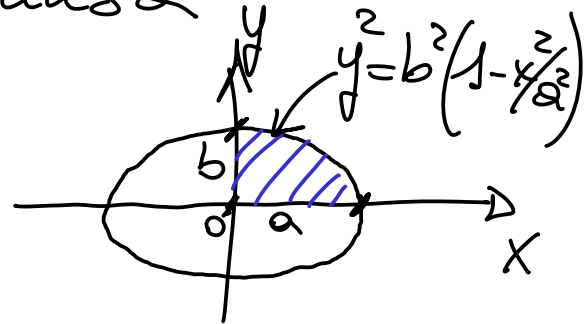
Verifica solo secondo caso: $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 dx x^{-\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_\varepsilon^1 =$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \in \mathbb{R}$$

————— 0 —————

Integrale di una funzione irrazionale

Esempio 10.12: calcolo dell'area racchiusa
dall'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$$S = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

$$= 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx, \text{ poniamo } x = a \sin(t) \rightarrow dx = a \cos(t) dt,$$

$$= 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cancel{a^2} \sin^2(t)} a \cos(t) dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} |\cos(t)| \cos(t) dt, \text{ oss. che } \cos(t) \geq 0 \text{ per } t \in [0, \pi/2],$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \frac{4ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt =$$

dove abbiamo usato che $\cos(2t) = \cos(t) \cdot \cos(t) - \sin(t) \sin(t)$
 $= 2\cos^2(t) - 1$

$$= 2ab \int_0^{\pi/2} dt + ab \int_0^{\pi/2} \cos(2t) 2dt =$$

$$= \cancel{2} \cdot ab \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}} + ab \sin(2t) \Big|_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\pi ab}} + ab(\overset{0}{\sin \pi} - \overset{0}{\sin 0})$$