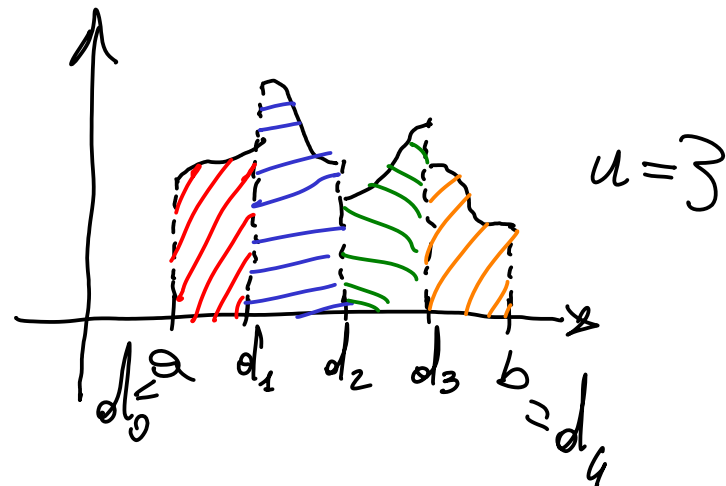


Integrali impropri

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. ha n p.t. di discontinuità
"con salto" $d_1, \dots, d_n \in (a, b)$ con $d_1 < d_2 < \dots < d_n$

allora si pone $d_0 = a$, $d_{n+1} = b$
e si calcola $\int_a^b dx f(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \int_{d_{j-1}}^{d_j} dx f(x)$



Integrali su intervalli illimitati

Def.: diciamo che l'integrale di $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è convergente
(o anche che f è integrabile) su $[a, +\infty)$ quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n dx f(x) =: \int_a^{+\infty} dx f(x) \in \mathbb{R}$$

Def.: diciamo che l'integrale di $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è divergente
(o anche che f ^{non} è integrabile) su $[a, +\infty)$ quando

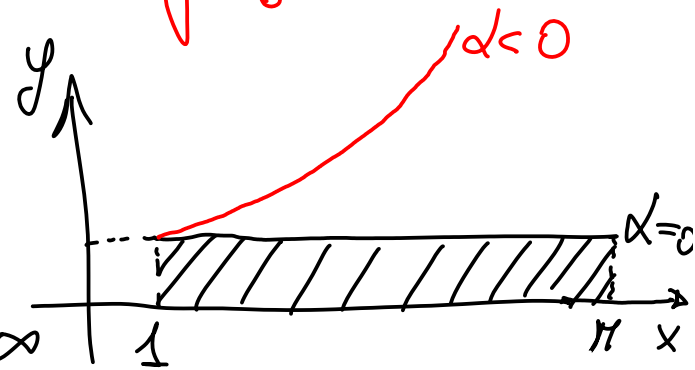
$$\int_a^{+\infty} dx f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n dx f(x) = \pm \infty$$

$$? \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \forall \alpha \leq 1 \\ \in \mathbb{R} & \forall \alpha > 1 \end{cases}$$

diverge!
converge!

Per $\alpha \leq 0$ è evidentemente divergente:

$$\text{es. } \alpha = 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$$



$$\text{Caso } \alpha = 1: \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \log x \Big|_1^R =$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \log R = +\infty$$

$$\text{Caso con } \alpha > 1: \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R dx x^{-\alpha} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^R$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{(\alpha-1) \cdot R^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} \right) = \frac{1}{\alpha-1} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Caso con } 0 < \alpha < 1: \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R dx x^{-\alpha} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^R$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = +\infty$$

Teorema [del confronto per integrali su intervalli illimitati]:

Siano $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$ allora

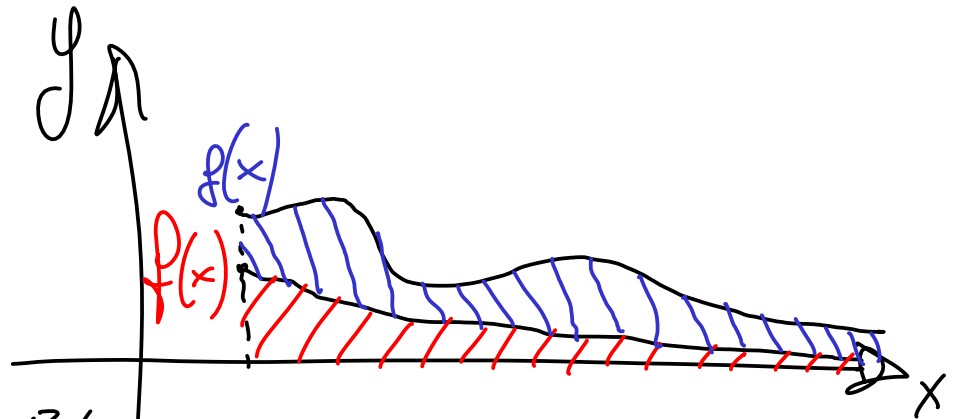
(A) Se $\int_a^{+\infty} dx g(x)$ è convergente allora lo è anche $\int_a^{+\infty} dx f(x)$

(B) Se $\int_a^{+\infty} dx f(x)$ è divergente allora lo è anche $\int_a^{+\infty} dx g(x)$

Orsì, guardate la figura

Esempio: si verificano

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^x dt (t^3 - 4t) e^{-t^2/2} \in \mathbb{R}$$



Osservazione: $\exists N > 0$ t.c. $\forall t \geq N$ si ha che

$$(t^3 - 4t) e^{-t^2/2} \leq 1/t^2, \text{ poich\'e } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t^3 - 4t)t^2}{e^{t^2/2}} = 0,$$

quindi per t grande abbastanza si avr\`a $\frac{(t^3 - 4t)t^2}{e^{t^2/2}} < 1$

Allora, $\int_N^{+\infty} dt (t^3 - 4t) e^{-t^2/2}$ converge perche'

$$\forall t \geq N, \quad 0 < (t^3 - 4t) e^{-t^2/2} < 1/t^2 \quad \text{e} \quad \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \Big|_N^{+\infty} = \frac{1}{N} \in \mathbb{R}$$

(dove abbiamo usato il teorema del confronto per $\int$ su interv.
illim.) -

Teorema [del confronto asintotico per integrali su intervalli illimitati]: Siano $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ e $f(x), g(x) \geq 0$ $\forall x \geq a$ allora

(A) $\int_a^{+\infty} dx f(x)$ converge se $\int_a^{+\infty} dx g(x)$ converge

(B) $\int_a^{+\infty} dx f(x)$ diverge se $\int_a^{+\infty} dx g(x)$ diverge.

Esempio: $F(\pi) = 2 \int_2^{\pi} \frac{dx}{(x+1) \cdot (x^3-1)}$ $? = \lim_{\pi \rightarrow +\infty} F(\pi)$

Sia $f(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot (x^3-1)}$, osservo che per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \sim \frac{1}{x^4}$

allora $\int_2^{+\infty} dx f(x)$ converge poiché converge anche $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{-1}{3} x^{-3} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{24}$

(dove abbiamo utilizzato il th. del confronto asintotico per $\int$ su interv. illimitati).

Teorema: Se $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è t.c. $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ è convergente
(si dice che è assolutamente convergente) allora è convergente
anche $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

Esercizio 5 di fine sett. 2019

Si discute la convergenza di $\int_2^{+\infty} dx \left(x^{\frac{1}{x^2}} - 1 \right)$

Definiamo $f(x) = x^{\frac{1}{x^2}} - 1 = e^{(\log x)/x^2} - 1$

Osservo che per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \sim \frac{\log x}{x^2}$ (poiché $\frac{\log(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$)

Considero $\int_2^{+\infty} dx \frac{\log(x)}{x^2} = \int_2^{+\infty} dx \underbrace{\log(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g'(x) \rightarrow g(x) = -\frac{1}{x}} = -\frac{\log x}{x} \Big|_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} =$

~~$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\log x}{x} + \frac{\log(2)}{2} - \frac{1}{x} \Big|_2^{+\infty} = +\frac{\log(2)}{2} + \frac{1}{2}$~~

Concludiamo quindi che $\int_2^{+\infty} dx f(x)$ converge perché $f(x) \sim \frac{\log(x)}{x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$ e $\int_2^{+\infty} dx \frac{\log(x)}{x^2}$ converge (dove abbiamo applicato il th. del confronto a sostituzione per $\int$ su intervalli illimitati).

Esercizio 4 del I Essayero 2016

Si discute la convergenza dell'integrale di Fresnel cioè
 $\int_0^{+\infty} dx \sin(x^2)$. Sappiamo che si discute la convergenza

di cui
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$$

Siccome $\int_0^{+\infty} dx \sin(x^2) = \int_0^1 dx \sin(x^2) + \int_1^{+\infty} dx \sin(x^2)$

studiamo la convergenza del secondo.

Osserviamo che $\int_1^{+\infty} dx \sin(x^2) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \sin(t)$

dove abbiamo posto $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow \frac{dt}{2x} = dx \Rightarrow \frac{dt}{2\sqrt{t}} = dx$