

Esercizio (3A) esame luglio 2016

Si calcoli $F(\pi) = 2 \int_2^{\pi} \frac{dx}{(x+1) \cdot (x^3-1)}$

Ricordo che $x^3-1 = (x-1) \cdot (x^2+x+1)$

$\Rightarrow (x+1) \cdot (x^3-1) = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x^2+x+1)$

Scriviamo quindi:

$$\int \frac{2 dx}{(x+1) \cdot (x^3-1)} = \int dx \left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} \right)$$

con a, b, c, d da determinarsi

(dalla formula generale
 $(1-x)^{q+1} = (1-x) \cdot \sum_{i=0}^q x^i$
con $q=2$)

deve allora essere vero che: $2 = a \cdot (x-1) \cdot (x^2+x+1) + b \cdot (x+1) \cdot (x^2+x+1) + (cx+d) \cdot (x^2-1)$

$$2 = a(x^3-1) + b(x^3+x^2+x+x^2+x+1) + c(x^3-x) + d(x^2-1)$$

$$\Rightarrow 2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = a(x^3-1) + b(x^3+2x^2+2x+1) + c(x^3-x) + d(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b+d=0 \\ 2b-c=0 \\ -a+b-d=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-3b \\ d=-2b \\ c=2b \\ 3b+b+2b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1/3 \\ c=2/3 \\ d=-2/3 \end{cases}$$

$$2 \int \frac{dx}{(x+1) \cdot (x^3-1)} = - \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int dx \frac{2x-2}{x^2+x+1}$$

$$= -\log|x+1| + \frac{1}{3} \log|x-1| + \frac{1}{3} \int dx \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{3} \int dx \frac{3}{x^2+x+1}$$

$$= -\log|x+1| + \frac{1}{3} \log|x-1| + \frac{1}{3} \log|x^2+x+1| - \frac{1}{3} \int dx \frac{3}{x^2+x+1}$$

A parte calcoliamo $\int dx \frac{1}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{3} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dx}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2} =$, poniamo $t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}) \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$,

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)$$

Torniamo ora al problema iniziale, cioè

$$F(\pi) = 2 \int_2^{\pi} \frac{dx}{(x+1)(x^3-1)} = \left(-\log|x+1| + \frac{1}{3} \log|x-1| + \frac{1}{3} \log|x^2+x+1| \right) \Big|_2^{\pi} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right) \Big|_2^{\pi}$$

$$\Rightarrow DF(\pi) = \log \frac{|x^3 - 1|^{1/3}}{|x + 1|} \Big|_2^\pi - \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right) \Big|_2^\pi$$

$\pi > 2$
 $\Rightarrow \pi^3 > 1$

$$= \log \frac{(\pi^3 - 1)^{1/3}}{\pi + 1} - \log \frac{\sqrt[3]{7}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[\arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\pi + \frac{1}{2} \right) \right) - \arctan \left(\frac{2 \cdot 5}{\sqrt{3} \cdot 7} \right) \right]$$

Es. (3B) Calcolare $\lim_{\pi \rightarrow +\infty} F(\pi)$

$$\lim_{\pi \rightarrow +\infty} \left(\log \frac{\pi \cdot (1 - 1/\pi^3)^{1/3}}{\pi \cdot (1 + 1/\pi)} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\pi + \frac{1}{2} \right) \right) - \log \frac{\sqrt[3]{7}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{5}{\sqrt{3}} \right) \right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{2} - \log \frac{\sqrt[3]{7}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{5}{\sqrt{3}} \right) eR$$

converge!

Es. 3 Tema d'esame fine settembre 2020

Studiare il grafico di $F(x) = \int_0^x dt (t^3 - 4t) e^{-t^2/2}$

Definiamo l'integrando $f(t) = (t^3 - 4t) e^{-t^2/2}$

Oss. che $F'(x) = f(x) = (x^3 - 4x) e^{-x^2/2}$

$$\textcircled{1} D = \mathbb{R}$$

Prima di andare avanti calcoliamo

$$F(x) = \int_0^x dt (t^3 - 4t) e^{-t^2/2} = \text{poniamo } u = -t^2/2 \text{ allora}$$
$$du = -t dt \Rightarrow \int dt (t^2 - 4) t e^{-t^2/2} = - \int du (-2u - 4) e^u = \int du (2u + 4) e^u =$$

$$= 2 \int \underbrace{du}_{f(u)} \underbrace{u e^u}_{g'(u)} + 4 \int e^u du = 4 e^u + 2u e^u - 2 \int du e^u = \cancel{4 e^u} + 2u e^u - \cancel{2 e^u}$$

$f(u) \quad g'(u) \Rightarrow g(u) = e^u$, $\Rightarrow F(x) = 2 \left(-\frac{t^2}{2} \right) e^{-t^2/2} + 2 e^{-t^2/2} \Big|_0^x$

$$\Rightarrow F(x) = (-x^2 + 2) e^{-x^2/2} - 2$$

Verifica: $F'(x) \overset{\text{Ok!}}{=} -2x e^{-x^2/2} + (-x^2 + 2)(-x) e^{-x^2/2} = (x^3 - 4x) e^{-x^2/2}$

② $F(-x) = (-x^2 + 2) e^{-x^2/2} - 2 = F(x)$ è pari.

③ Limiti alle frontiere

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left((-x^2 + 2) e^{-x^2/2} - 2 \right) = -2$$

④ Asintoti. 3 solo asintoti orizzontali perché
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = -2$

⑤ Ricerca degli zeri. Osservo che $F(0) = \int_0^0 dt (t^3 - 4t) e^{-t^2/2} = 0$
0 è sol. di $F(x) = 0$, per cercare eventuali altri
zeri dovrei risolvere $(-x^2 + 2)e^{-x^2/2} - 2 = 0$ (fossimatto...)

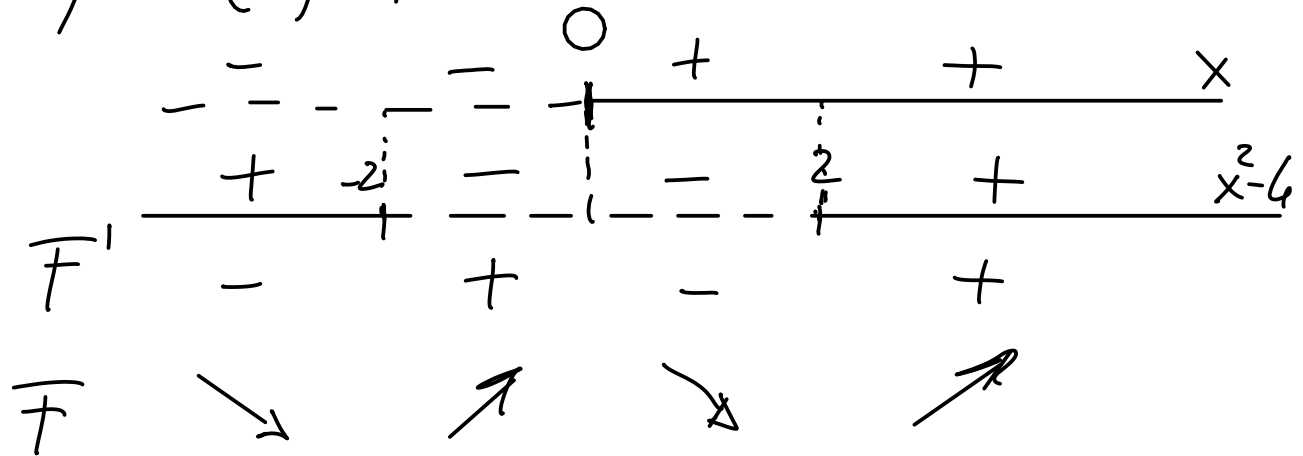
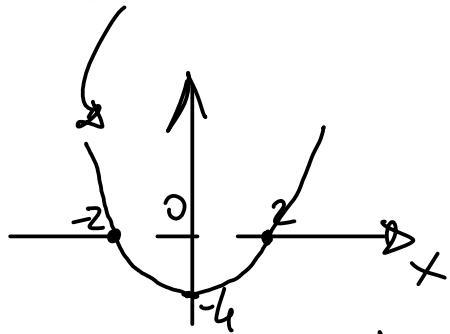
⑥ Studio della derivata prima.

$$F'(x) = f(x) = (x^3 - 4x) e^{-x^2/2}$$

$F'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 4) e^{-x^2/2} = 0 \Rightarrow$ gli zeri sono $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2$
quindi p.ti stazionari in $x = 0, \pm 2$.

Studio del segno di F' ; $F'(x) \geq 0 \Rightarrow$ consideriamo

$$x \cdot (x^2 - 4) e^{-x^2/2} > 0$$



la funzione F è crescente per $x > 2$ e $x \in (-2, 0)$
 " " " " decrescente per $x < -2$ e $x \in (0, 2)$

⑦ Studio di concavità / convessità

$$\begin{aligned} F''(x) &= f'(x) = \left((x^3 - 4x) e^{-x^2/2} \right)' = \left[(3x^2 - 4) - x(x^3 - 4x) \right] e^{-x^2/2} \\ &= (-x^4 + 7x^2 - 4) e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

I p.t. di flesso sono tra le soluzioni di $F''(x) = 0$

$$\Rightarrow x^4 - 7x^2 + 4 = 0, \text{ poniamo } w = x^2, \Rightarrow w^2 - 7w + 4 = 0$$

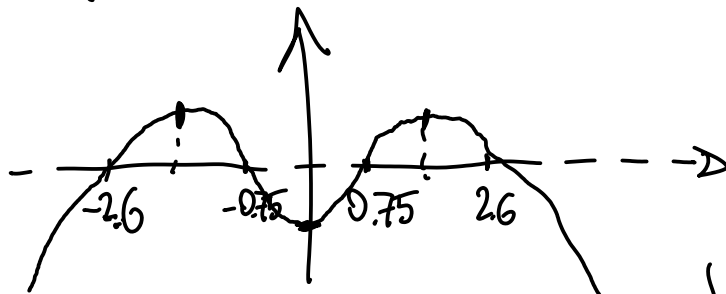
$$\Rightarrow w_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 16}}{2} = \begin{cases} \frac{7 + \sqrt{33}}{2} \approx 6.4 \\ \frac{7 - \sqrt{33}}{2} \approx 0.6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{gli zeri di } F''(x) = 0 \text{ sono } x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{7 - \sqrt{33}}{2}} \approx \pm 0.75$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{7 + \sqrt{33}}{2}} \approx \pm 2.6$$

Studio del segno di F'' : $-x^4 + 7x^2 - 4 = 0$

$$g(x) = -x^4 + 7x^2 - 4$$



Per $x \rightarrow \pm\infty$, $g(x) = -\infty$

$g(-x) = g(x)$ è pari

$g'(x) = 0$ ammette 3 sol.

$F''(x) > 0$ (quindi F è convessa) in $x \in \left(-\sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{2}}, -\sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{2}}\right)$
 e in $x \in \left(\sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{2}}, \sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{2}}\right)$

$F''(x) < 0$ (quindi F è concava) in $x < -\sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{2}}$,
 in $x \in \left(-\sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{2}}, +\sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{2}}\right)$ e in $x > \sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{2}}$

$$F(\pm 2) = -2e^{-2} - 2$$

