

Es. 5.?

$$\int dx \underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)} = -e^x \cos(x) + \int dx \underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)} =$$

$\Downarrow f'(x) = e^x$ $\Downarrow g(x) = -\cos(x)$
 $\Downarrow f'(x) = e^x$ $\Downarrow g(x) = \sin(x)$

$$\rightarrow = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int dx e^x \sin(x)$$

$$\Rightarrow \int dx e^x \sin(x) = \frac{-e^x \cos(x) + e^x \sin(x)}{2}$$

è un esempio
di integrale
ciclico

$$D \left(\frac{-e^x \cos(x) + e^x \sin(x)}{2} \right) \stackrel{Ok!}{=} \frac{-e^x \cos(x) + e^x \sin(x) + e^x \sin(x) + e^x \cos(x)}{2} = e^x \sin(x)$$

Esempio 5.14: $\int dx \log(x)$?

$$\int dx \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\log(x)}_{f(x)} = x \log(x) - \int dx \cancel{x} \cdot \cancel{\frac{1}{x}} = x \log x - x$$

$$\begin{array}{l} g'(x) \quad f(x) \\ \Downarrow \quad \Downarrow \\ g(x)=x \quad f'(x)=\frac{1}{x} \end{array}$$

Verifica: $D(x \cdot \log(x) - x) = \log(x) + \cancel{x} \cdot \cancel{\frac{1}{x}} - \cancel{1} = \log(x)$

Esempio 10.3

$$\int dx \frac{x}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2} \int dx \frac{(x^2+2x+4)'}{x^2+2x+4} - \int dx \frac{1}{x^2+2x+4} =$$

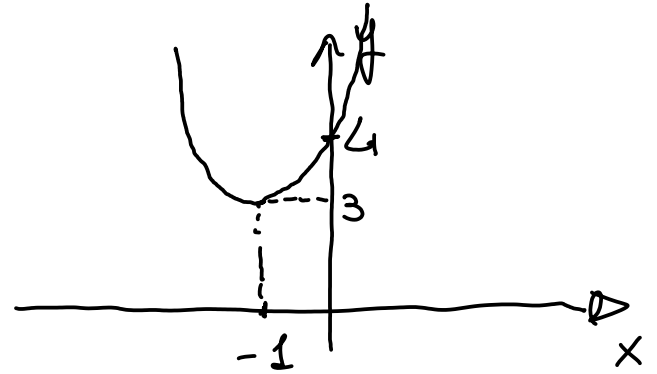
Inciso: $(x^2+2x+4)' = 2x+2$ $x = \frac{1}{2}(2x+2) - 1$	$= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+4) - \int dx \frac{1}{x^2+2x+4}$
--	---

Studiamo ora parte $\int dx \frac{1}{x^2+2x+4}$ definiamo $P(x) = x^2 + 2x + 4$

Cerchiamo le radici di $P(x) = 0$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3}$

In fatti, dal grafico di $P(x)$ si capisce che

$$P(x) = (x+1)^2 + 3$$



$$\Rightarrow \int dx \frac{1}{(x+1)^2 + 3} = \int d(x+1) \cdot \frac{1}{(x+1)^2 + 3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\text{poniamo } t = \frac{x+1}{\sqrt{3}}, dt = \frac{dx}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{3} \int \frac{\sqrt{3} dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \int dx \frac{x}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2} \log(x^2+2x+4) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Integrali di funzioni razionali (strategia)

Sia $\int dx \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$ ←

↳
Tuttavia: Se $\text{grado } P(x) \geq \text{grado}(Q(x))$ allora $\exists N(x)$ e $R(x)$
t.c. $\text{grado } N(x) = \text{grado}(P(x)) - \text{grado}(Q(x))$, $\text{grado } R(x) < \text{grado}(Q(x))$
e $\frac{P(x)}{Q(x)} = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, quindi $\int dx \frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{\int N(x) dx}_{\text{banale}} + \int dx \frac{R(x)}{Q(x)}$
e quest'ultimo integrale è del tipo

↳
Sia inoltre $Q(x) = D_1(x) \cdot D_2(x) \cdot \dots \cdot D_n(x)$ con $\text{grado}(D_j(x)) = 1, 2 \forall j=1, \dots, n$

Allora è possibile effettuare la scomposizione

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1(x)}{D_1(x)} + \frac{C_2(x)}{D_2(x)} + \dots + \frac{C_n(x)}{D_n(x)} \quad \text{con}$$

$\text{grado}(C_j(x)) < \text{grado}(D_j(x)) \quad \forall j=1, \dots, n$, allora

$$\int dx \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^n \int dx \frac{C_j(x)}{D_j(x)}$$

$\int dx \frac{C_j(x)}{D_j(x)}$ può essere del tipo $\int dx \frac{a_j}{b_j x + c_j}$ se $\text{grado}(D_j(x)) = 1$

$$\text{e } \int dx \frac{a_j}{b_j x + c_j} = \frac{a_j}{b_j} \log |b_j x + c_j|$$

Rimane il caso $\int dx \frac{C_j(x)}{D_j(x)} = \int dx \frac{a_j x + b_j}{x^2 + c_j x + d_j}$ con $x^2 + c_j x + d_j = \left(x + \frac{c_j}{2}\right)^2 + e_j$
 $\swarrow e_j = d_j - \frac{c_j^2}{4} > 0$

Allora $\int dx \frac{C_j(x)}{D_j(x)} = \frac{a_j}{2} \log(x^2 + c_j x + d_j) + \frac{\cos t_j}{1} \arctan\left(\frac{x + \frac{c_j}{2}}{\frac{\cos t_j}{2}}\right)$

————— ◯ —————

Esercizio (3A) esame luglio 2016

Si calcoli $F(\pi) = 2 \int_2^{\pi} \frac{dx}{(x+1) \cdot (x^3-1)}$

Ricordo che $x^3 - 1 = (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$

$\Rightarrow (x+1) \cdot (x^3-1) = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x^2+x+1)$

(dalla formula generale
 $(1-x)^{q+1} = (1-x) \cdot \sum_{i=0}^q x^i$
 con $q=2$)

Scriviamo quindi:

$$\int \frac{2 dx}{(x+1) \cdot (x^3-1)} = \int dx \left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} \right)$$

con a, b, c, d da determinarsi

deve allora essere vero che: $2 = a \cdot (x-1) \cdot (x^2+x+1) + b \cdot (x+1) \cdot (x^2+x+1) + (cx+d) \cdot (x^2-1)$

$$2 = a(x^3-1) + b(x^3+x^2+x+x^2+x+1) + c(x^3-x) + d(x^2-1)$$

$$\Rightarrow 2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = a(x^3-1) + b(x^3+2x^2+2x+1) + c(x^3-x) + d(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b+d=0 \\ 2b-c=0 \\ -a+b-d=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-3b \\ d=-2b \\ c=2b \\ 3b+b+2b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1/3 \\ c=2/3 \\ d=-2/3 \end{cases}$$

$$2 \int \frac{dx}{(x+1) \cdot (x^3-1)} = - \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int dx \frac{2x-2}{x^2+x+1}$$

$$= -\log|x+1| + \frac{1}{3} \log|x-1| + \frac{1}{3} \int dx \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{3} \int dx \frac{3}{x^2+x+1}$$

$$= -\log|x+1| + \frac{1}{3} \log|x-1| + \frac{1}{3} \log|x^2+x+1| - \frac{1}{3} \int dx \frac{3}{x^2+x+1}$$