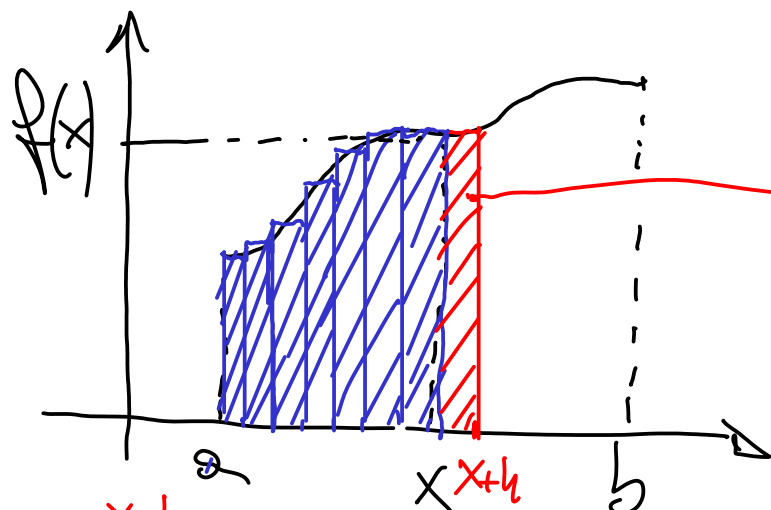


$$F(x) = \int_a^x dt f(t) \quad \text{con } f \in \mathcal{C}([a, b])$$

$x \in [a, b]$.

? F'



$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} dt f(t) - \int_a^x dt f(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} dt f(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\lambda) = f(x)$$

con $\lambda \in [x, x+h]$

Siccome per il th. della media integrale

$$\frac{\int_x^{x+h} dt f(t)}{x+h-x} = f(\lambda) \quad \text{con } \lambda \in [x, x+h]$$

Tabella delle primitive fondamentali.

$$\int dx x^\alpha = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c \quad \forall \alpha \neq -1$$

$C \in \mathbb{R}$ è una costante

$$\int \frac{dx}{|x|} = \log|x| + c \quad \int dx e^x = e^x + c$$

$$\int dx \sin(x) = -\cos(x) + c \quad \int dx \cos(x) = \sin(x) + c$$

$$\int dx \frac{1}{\cos^2(x)} = \int dx (1 + \tan^2(x)) = \tan(x) + c \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + c$$

$$\int dx \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c, \quad -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x) + c$$

Metodi di integrazione: per scomposizione, per parti, per sostituzione

Metodo di scomposizione:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \underbrace{\int f(x) dx}_{F(x)} + \beta \underbrace{\int g(x) dx}_{G(x)}$$

allora $D(\alpha F(x) + \beta G(x)) = \alpha D(F(x)) + \beta D(G(x)) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

Applicazione: Sia $P(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j$

$$\int dx P(x) = \int dx \sum_{j=0}^n c_j x^j = \sum_{j=0}^n c_j \int dx x^j = \sum_{j=0}^n \frac{c_j}{j+1} x^{j+1}$$

Metodo per sostituzione: supponiamo di poter esprimere
 $x = \varphi(t)$ con φ invertibile su $\varphi([a,b])$

$$\int dx f(x) = \int dt f(\varphi(t)) \varphi'(t) + c \Leftrightarrow \int_a^b dx f(x) = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} dt f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Esempio 5.2: $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 1} =$

Poniamo $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$, $= \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) \Big|_1^e$

$$\Rightarrow = \arctan(e) - \arctan(1) = \arctan(e) - \pi/4$$

Verifica: è vero che $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \stackrel{?}{=} \arctan(e^x)$? OK!

$$D(\arctan(e^x)) = \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x = \frac{1}{\frac{1+(e^x)^2}{e^x}} = \frac{1}{e^x + 1/e^x}$$

$$\text{Es. 5.7: } \int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1+x^2/3},$$

pongo $t = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{3}} \rightarrow dx = \sqrt{3} dt,$

$$\rightarrow = \frac{1}{3} \int \frac{\sqrt{3} dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Verifica: $D\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{x^2+3}?$

Metodo per parti:  $D(f(x) \cdot g(x)) = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g'(x) = D(f(x) \cdot g(x)) - f'(x) \cdot g(x)$$

$$\Rightarrow \int dx f(x) \cdot g'(x) = \int dx D(f(x) \cdot g(x)) - \int dx f'(x) \cdot g(x) + c$$

$$\Rightarrow \int dx f(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) - \int dx f'(x) \cdot g(x) + C$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx f(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx f'(x) \cdot g(x)$$

Esempio 5.11:

$$\int dx \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)} = x \cdot (-\cos(x)) + \int dx 1 \cdot \cos(x) =$$

$$\underbrace{f(x) \cdot g'(x) \Rightarrow f(x) = -\cos(x)}_{\text{}} \Big| = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$$

Verifica: $D(-x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C) = x \cdot \sin(x)$?

Se avessi scelto $f(x) = \sin(x)$ e $g'(x) = x$?

Ci prova: $\int dx \underbrace{x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} = \frac{x^2}{2} \cdot \sin(x) - \int dx \frac{x^2}{2} \cdot \cos(x)$

$$\Downarrow$$
$$g(x) = \frac{x^2}{2}$$