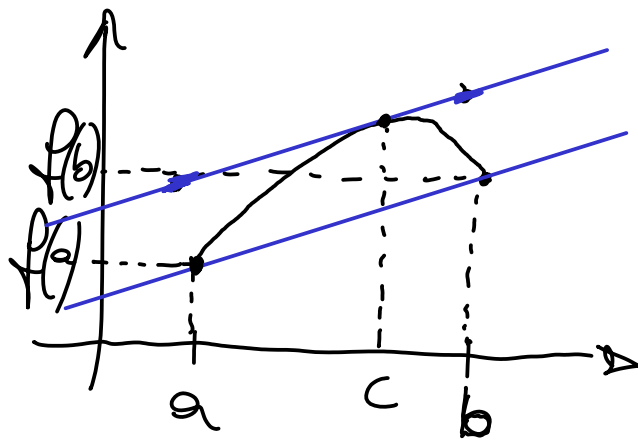


Def.: Si dice che un p.to x_0 t.c. $f'(x_0) = 0$ è
un p.to stazionario.

Teorema [di Lagrange = si pronuncia come il colore "beige"]:
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con f continua in $[a, b]$ (cioè $f \in \mathcal{C}([a, b])$)
e derivabile in (a, b) , allora $\exists c \in (a, b)$ t.c.
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollario [Teorema di Rolle]:

Se alle ipotesi precedenti
si aggiunge che $f(a) = f(b)$,
allora $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = 0$.



Dim [del th. di Lagrange]: Ricordiamo che la retta passante
per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ è di equazione $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Introduciamo la funzione ausiliaria

$$w(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right].$$

Osserviamo che $w(x) \in \mathcal{C}([a, b])$ e è derivabile in (a, b) ;
inoltre, si ha che $w(a) = 0 = w(b)$.

Per il teorema di Weierstrass e quello dei valori intermedi;

$$\omega([a, b]) = [m, M]; \text{ inoltre } m \leq 0 \leq M.$$

1° caso (banale): $m = M = 0$, allora $\forall c \in (a, b)$

$$\text{calcoliamo } \omega'(c) = \frac{d\omega}{dx}(c) = \frac{d0}{dx} = 0.$$

$$\text{Inoltre } \omega'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2° caso (non banale): $m \neq 0 = M$, $m = 0 \neq M$, $m < 0 < M$

Si tratta allo stesso modo, per fissare le idee supponiamo che $0 < M$. Per Weierstrass, $\exists c \in [a, b]$ t.c. $\omega(c) = M$.

Osservo che $c \neq a$ e $c \neq b \Rightarrow c \in (a, b)$.

Calcoliamo $\omega'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Inoltre, per il th. di Fermat

abbiamo che $w'(c) = 0 \Rightarrow 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
 $\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ C.V.D.

Teorema [di de l'Hospital oppure de l'Hôpital, si dice "de l'opital"]: Siano $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ entrambe derivabili su tutto (a, b) ,
 t.c. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ [∞]; inoltre $g(x) \neq 0$
 e $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$
 allora $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

La tesi vale anche se $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0 \quad [+\infty]$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \left(\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \right), \text{ anche}$$

nei casi in cui $a^+ = -\infty$ e $b^- = +\infty$.

Esempi base di utilizzo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{+\sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

Gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{rx}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{re^{rx}} = 0$$

$\forall r > 0$ ← costante

quindi $\forall \alpha, \beta > 0$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{\frac{\beta}{\alpha} x}} \right)^\alpha = 0$$

Inoltre $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ si ha che
(dove abbiamo posto $t = \log x$) -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^\beta} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\alpha}{e^{\beta t}} = 0$$

Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{x} = 0^-$

Es. 63 pag. 246

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \log x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{1}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

Es. 62 pag. 246

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

De l'Hopital (se lo conosci non ti uccide)

Esempio 6.9

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad \text{[crossed out]}$$

Proviamo per altre vie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \frac{1 - \sin x}{x}}{x \cdot \frac{1 + \sin x}{x}} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Esercizio 67: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = 1 -$$