

Proposizione (regola della catena): Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (con $D \subseteq \mathbb{R}$) e $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$ (con $D' \subseteq f(D)$) t.c. f è derivabile in $x_0 \in D$ e g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, allora $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e si ha che

$$(g \circ f)'(x_0) = D(g(f(x_0))) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Esercizio: giustificare la regola riguardante la derivata di $f(x)/g(x)$ (usando quella per il prodotto e).

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot D\left(\frac{1}{g(x)}\right)$$

Consideriamo a parte $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = (h(g(x)))'$ dove $h(y) = 1/y$,
ricordando che $h'(y) = (y^{-1})' = -1 \cdot y^{-2} = -\frac{1}{y^2}$, per la regola
della catena abbiamo:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = (h(g(x)))' = h'(g(x)) \cdot g'(x) = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x)/g(x) - f(x) \cdot g'(x)/(g(x))^2 = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Es.: giustificare che $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ è soluzione dell'eq. $\dot{N} = -\lambda N$,
cioè l'eq. diff. per il decadimento radioattivo.

Per verificarlo calcoliamo $\frac{d}{dt} N(t) = \frac{d}{dt} (N_0 e^{-\lambda t}) = N_0 \frac{d}{dt} e^{-\lambda t}$

Deriviamo con $f(t) = -\lambda t$ e con $g(x) = e^x$; ricordiamo che $g'(x) = e^x$,
allora $N_0 \frac{d}{dt} e^{-\lambda t} = N_0 g'(-\lambda t) \frac{d}{dt} (-\lambda t) = N_0 e^{-\lambda t} (-\lambda) = -\lambda (N_0 e^{-\lambda t}) = -\lambda N(t)$

Esercizio: verificare che $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ è soluzione
dell'eq. per l'oscillatore armonico $\ddot{x} = -\omega^2 x$ (dove $\omega^2 = \frac{k}{m}$, A e φ sono costanti).

— 0 —

Derivate delle funzioni inverse

Intuitivamente: se $y = y(x)$ e $y' = \frac{dy}{dx}$ $\checkmark$ $y(x)$ è invertibile

$$\text{allora } x = y^{-1} = x(y) \Rightarrow x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'}$$

Proposizione: Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. è derivabile su tutto il dominio

$D \subseteq \mathbb{R}$ e $f'(x) \neq 0 \forall x \in D$, allora

① f è invertibile su tutto D e sia $g: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ la sua inversa, cioè $g(f(x)) = x \forall x \in D$.

② g è derivabile su tutto $f(D)$ e $\forall y \in f(D)$ si ha che $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x=g(y)} = \frac{1}{f'(g(y))}$

Verifica di ②: osserviamo che

$$\frac{d}{dx} (g(f(x))) = \frac{d}{dx} x = 1 \quad \text{e, per la regola della}$$

catena si ha che $\frac{d}{dx} (g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

$$\Rightarrow g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad , \text{ poiché } y = f(x)$$

$$\text{e quindi } g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

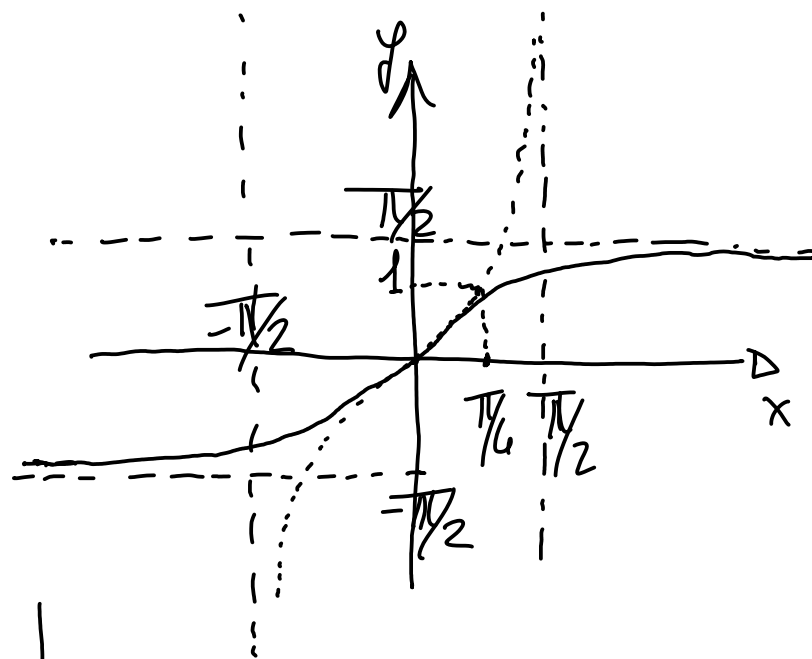
Esempio 3.14

$$\text{Siano } f(x) = \tan(x)$$

$$\text{e } g(y) = f^{-1}(y) = \arctan(y)$$

$$D(\arctan(y)) = g'(y) = \frac{1}{D(\tan(x))} \Big|_{x=\arctan(y)}$$

- Inciso - $D(\tan(x)) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + (\tan(x))^2$



- Finito l'inciso, riprendiamo da -

$$D(\arctan(y)) = \frac{1}{(\tan(x))'} \Big|_{x=\arctan(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))}$$

$$= \frac{1}{1 + y^2}$$

abbiamo ottenuto che $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Esempio 3.15

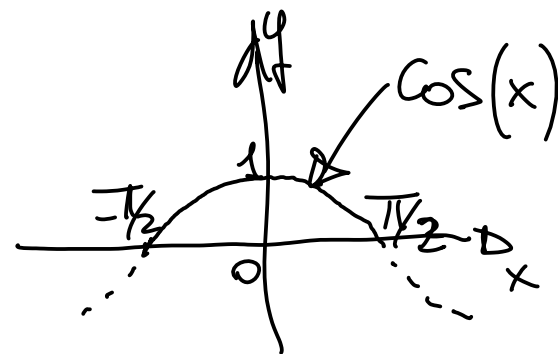
$$f(x) = \sin(x), \quad g(y) = \arcsin(y), \quad ? = \arcsin'(y)$$

$$D(\arcsin(y)) = \frac{1}{D(\sin(x))} \Big|_{x=\arcsin(y)} \quad (\sin(x))' = \cos(x)$$

$$D(\arcsin(y)) = \frac{1}{\cos(x)} \Big|_{x=\arcsin(y)}$$

Osservo che (1) $\cos(x) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(x)}$,

(2) quando $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ si ha
che $\cos(x) \geq 0$, quindi scarto

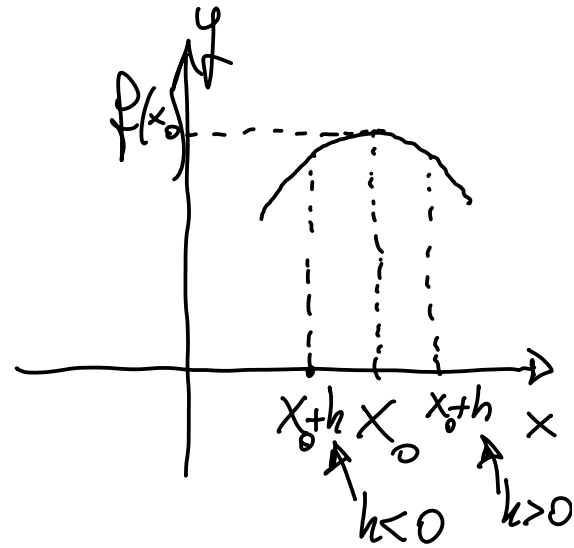


Di conseguenza, $D(\arcsin(y)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \Rightarrow \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Esercizio (fare l'esempio 3.16): $D(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Def.: diciamo che $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ è un p.to di massimo [minimo] locale
per $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, se $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha che $f(x) \leq f(x_0)$ [$f(x) \geq f(x_0)$]

Teorema [di Fermat (= si dice Fermat)]: se $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ è p.to di massimo o di minimo locale per $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.



Dim.: Per fissare le idee consideriamo x_0 p.to di max; calcoliamo

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0,$$

poiché $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$ e $h > 0$ (applicando il th. della permanenza del segno)

$$\text{Ora calcoliamo } f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

poiché $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$ e $h < 0$ (di nuovo per la permanenza del segno)

Se f è derivabile in x_0 allora

$$\exists f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$$

C.V.D.

Def.: Si dice che un p.to x_0 t.c. $f'(x_0) = 0$ è
un p.to stazionario.