

Tabella dei limiti notevoli con le relazioni di
asintotico a un infinitesimo

$$\sin(\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$

$$1 - \cos(\varepsilon(x)) \sim \frac{\varepsilon^2(x)}{2}$$

$$e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x)$$

$$\log(1 + \varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$

$$(1 + \varepsilon(x))^\alpha - 1 \sim \alpha \varepsilon(x)$$

dove $\varepsilon(x)$ infinitesimo per $x \rightarrow c$
($\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} \varepsilon(x) = 0$)

Passiamo alle derivate.

t	$s(t)$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

$$s(t) \approx t^2$$

$$v = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

è un limite di rapporto incrementale!

Sia $x(t)$, l'ascissa lungo una retta orientata, allora

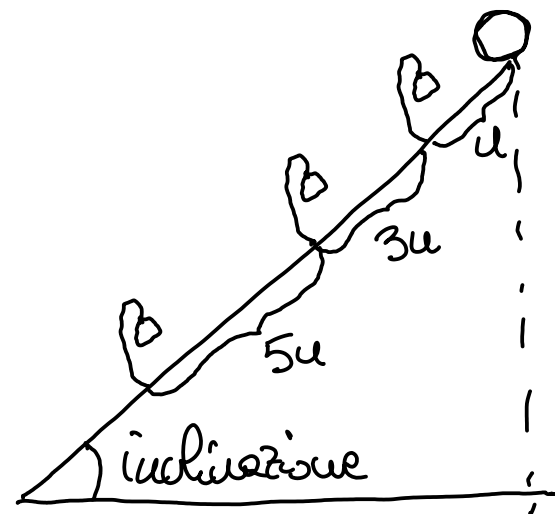
$$v(t) := \dot{x}(t)$$

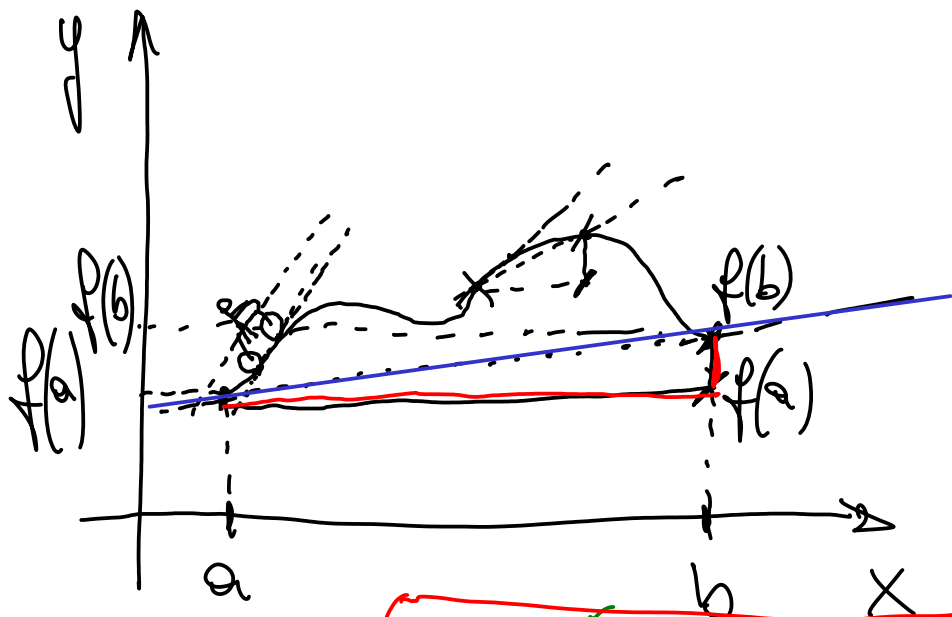
è definita come

$$\text{dove } \dot{x}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

Simboli di derivata di una funzione $f(x)$

$$f', Df, \frac{df}{dx}$$





"pendenza media"

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m \text{ il coef.}$$

ficiente
angolare
della retta
passante per
 $(a, f(a)), (b, f(b))$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0}$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

coef. ang. della retta
tangente

è il coef. ang.
della retta passante (secante rispetto)
per $(x_0, f(x_0)), (x_0 + h, f(x_0 + h))$

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in x_0 , allora

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ è la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t_0+h)^2 - t_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{t_0^2} + 2ht_0 + \cancel{h^2} - \cancel{t_0^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2t_0 + h = 2t_0$$

Sei $f(x) = x^d$, allora $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^d - x^d}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} x^d \cdot \frac{(1 + h/x)^d - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} x^d \cdot \frac{d \cdot \frac{h}{x}}{h} = dx^{d-1}$$

Sei $f(x) = \sin(x)$, allora

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot \cos(h) + \cos(x) \cdot \sin(h) - \sin(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \cdot \frac{-h}{2h} + \cos(x) = \cos(x)$$

Esercizio: $f(x) = \cos(x)$, allora $f'(x) = -\sin(x)$ (si usa $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$)

D $e^x = e^x$, infatti.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

D $\log x = 1/x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 + \frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x}}{h} = \frac{1}{x}$$

Proposizione: Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$,
allora f è continua.

Verifica: $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) - f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h = \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0) \cdot h = 0$

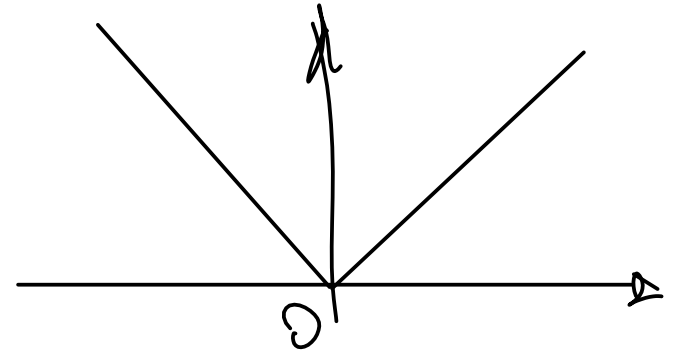
Sia $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0)] = 0 + f(x_0) = f(x_0)$.

Def.: diciamo che $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ha un p.to angoloso in x_0
 se $\exists f'_{\pm}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ e $f'_{+}(x_0) \neq f'_{-}(x_0)$

Esempio: $|x|$ ha un p.to angoloso in 0

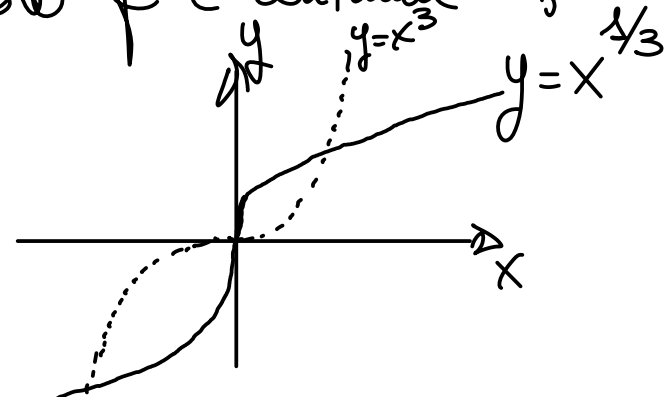
infatti, $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 = f'_{-}(0)$

e $f'_{+}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = 1$

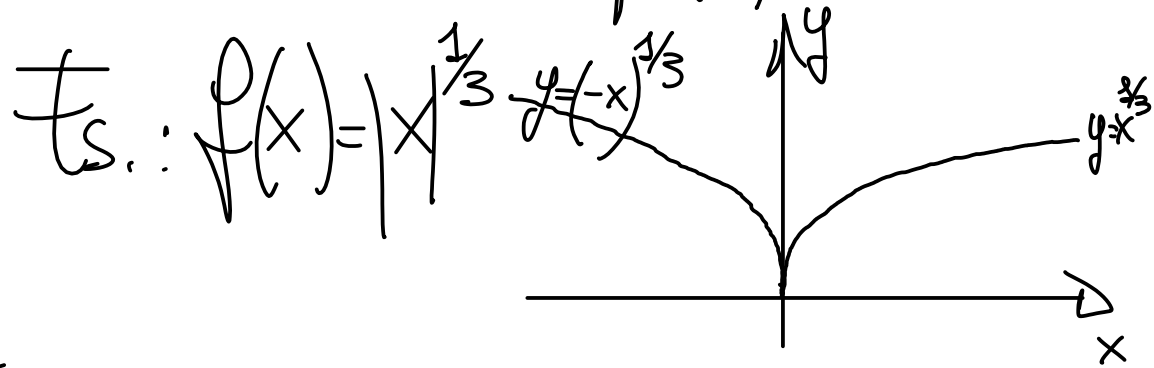


Def.: diciamo che una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ha un
 flesso con tangente verticale in x_0 , quando f è continua in $x_0 \in D \cap \mathbb{R}$
 e $f'(x_0) = +\infty$ (oppure $-\infty$)

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^{1/3} - x_0}{h} =$, se $x_0 = 0$, $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(h^2)^{1/3}} = +\infty$



Def.: diciamo che una funzione f ha una cuspide in $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ quando è continua in x_0 e $f'_+(x_0) = +\infty$ $[-\infty]$ e $f'_-(x_0) = -\infty$ $[+\infty]$.



Regole di derivazione

Prop.: siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ (con $D \subseteq \mathbb{R}$) derivabili in $x_0 \in D$, allora

$$D(f \pm g)(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$D(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0); \quad D\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

quando $g(x_0) \neq 0$

Verifica (solo per il prodotto).

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) g(x_0+h)}{h} + \frac{f(x_0) g(x_0+h) - f(x_0) g(x_0)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0+h) \right) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x_0+h) + f(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$