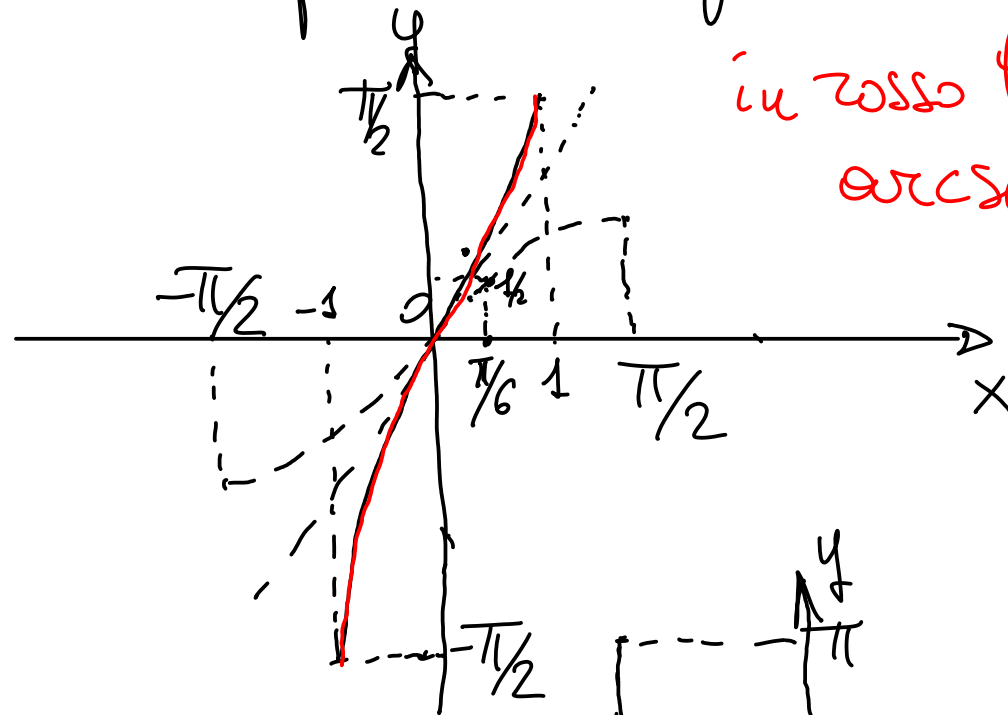


Inverse delle funzioni trigonometriche

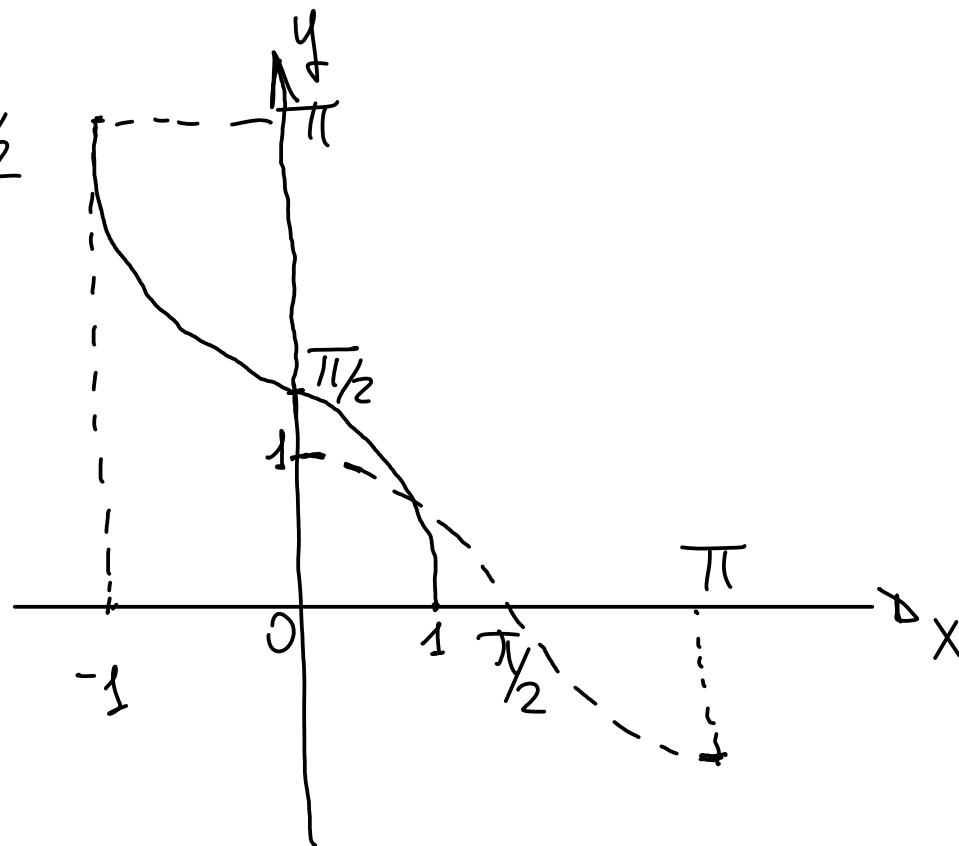
x	$y = \arcsin(x)$
0	0
$\pm 1/2$	$\pm \pi/6$
$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm \pi/4$
$\pm \sqrt{3}/2$	$\pm \pi/3$
± 1	$\pm \pi/2$



in rosso la funz.
 $\arcsin(x)$

x	$y = \arccos(x)$
1	0
$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/3$
0	$\pi/2$

x	$y = \arccos(x)$
-1	π
$-\sqrt{3}/2$	$5\pi/6$
$-\sqrt{2}/2$	$3\pi/4$
$-1/2$	$2\pi/3$

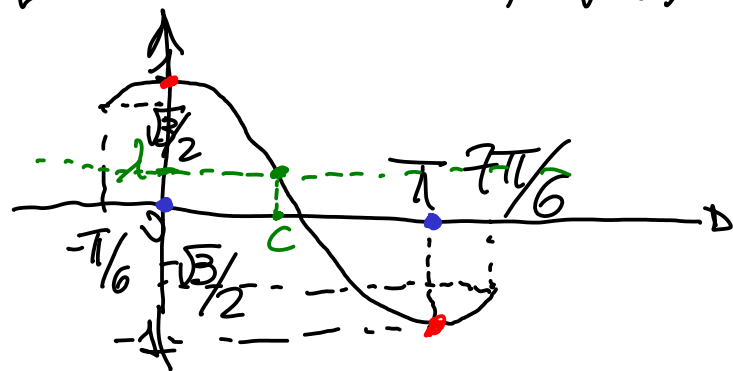


Teorema: Sia $f \in \mathcal{C}([a, b])$ (cioè $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e f è continua su $[a, b]$) allora l'immagine di f è t.c. $f([a, b]) = [m, M]$.
 Si ottiene come corollario dei due seguenti.

Teorema [di Weierstrass]: Sia $f \in \mathcal{C}([a, b])$ allora
 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ t.c. $\forall x \in [a, b]$ si ha $m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$

Esempio: $\cos x$ tra $-\pi/6$ e $\pi/6$

p.to di max in 0 max. in 1
 " " min. in π min. in -1.



Teorema [dei valori intermedi]: Sia $f \in \mathcal{C}([a, b])$ allora
 $\forall \lambda \in [m, M]$ (dove m, M sono il min. e il max. della f in $[a, b]$)
 allora $\exists c \in [a, b]$ t.c. $f(c) = \lambda$.

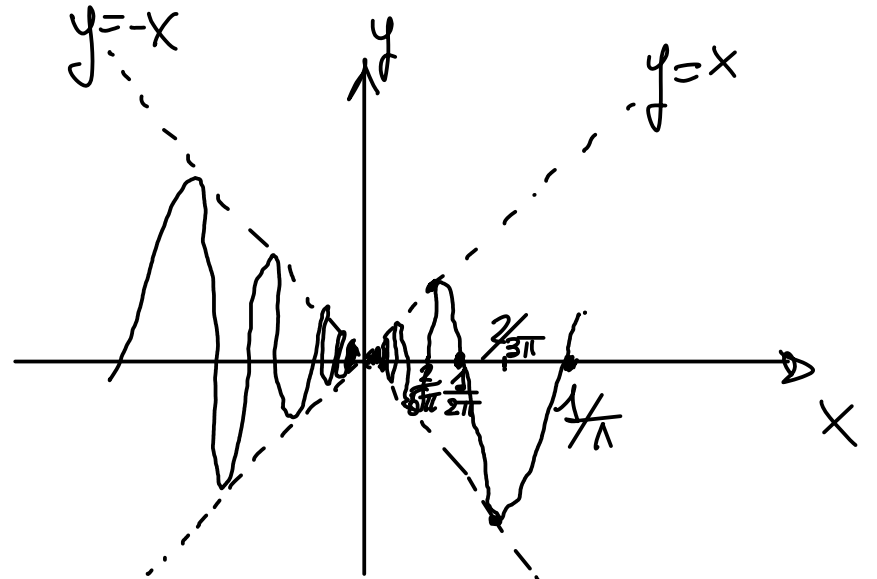
Def.: diciamo che una certa proprietà vale definitivamente per $x \rightarrow c$, quando essa vale $\forall x$ in un intervallo aperto $(a, b) \setminus \{c\}$ con $a < c < b$.

Esempio: $x > 6$ definitivamente per $x \rightarrow 5$, perché ad esempio vale $\forall x \in (4, 6)$.

~~Teorema~~ [del confronto]: Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) t.c. vale definitivamente per $x \rightarrow c$ che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = l$ allora $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l$.

Esempio: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(1/x) = 0$

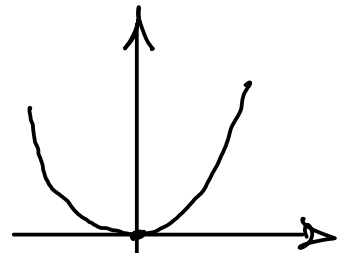
Verifica: Prendiamo $f(x) = -|x|$ e $h(x) = |x|$ allora $-|x| = f(x) \leq \underset{g(x)}{x \cdot \sin(1/x)} \leq h(x) = |x|$



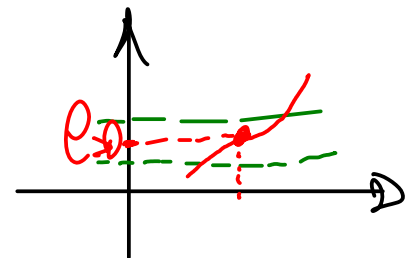
allora siccome $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} k(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Teorema [della permanenza del segno]: Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$)
t.c. $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \rightarrow c$ e $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$
allora $\ell \geq 0$.

Oss.: non è vero che se $f(x) > 0$ allora il limite è > 0
Es.: x^2 per $x \rightarrow 0$



Teorema [della permanenza del segno in 1° forma]:
Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) t.c. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell > 0$ allora
 $f(x)$ è definitivamente positivo per $x \rightarrow c$



Proposizione: Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l_2$ con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm g(x) = l_1 \pm l_2, \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{se } l_2 \neq 0), \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = l_1^{l_2} \quad (\text{quando } l_1 > 0).$$

Prop. (aritmetizzazione parziale di ∞): Siano $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm g(x) = +\infty$ se $l_1 = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot g(x) = \text{sign}(l_2) \cdot (+\infty) \quad \text{quando } l_1 = +\infty \text{ e } l_2 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \text{quando } l_1 > 0 \text{ e } l_2 = 0, \text{ con } g(x) \text{ definitivamente pos. per } x \rightarrow c$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{g(x)} = +\infty \quad \text{quando } l_1 = +\infty \text{ e } l_2 > 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0, \text{ come applicazione della prop. seguente.}$$

[si ponga $y = 1/x$ e si calcoli $\lim_{y \rightarrow 0^+} y \cdot \sin(1/y) = 0$].

Proposizione (cambio di variabile nel limite):

$$\text{Siano } f(x) \text{ e } g(y) \text{ t.c. } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1 \text{ e } \lim_{y \rightarrow l_1} g(y) = l_2$$

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = l_2.$$

Esempio: $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$, poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = +\infty$

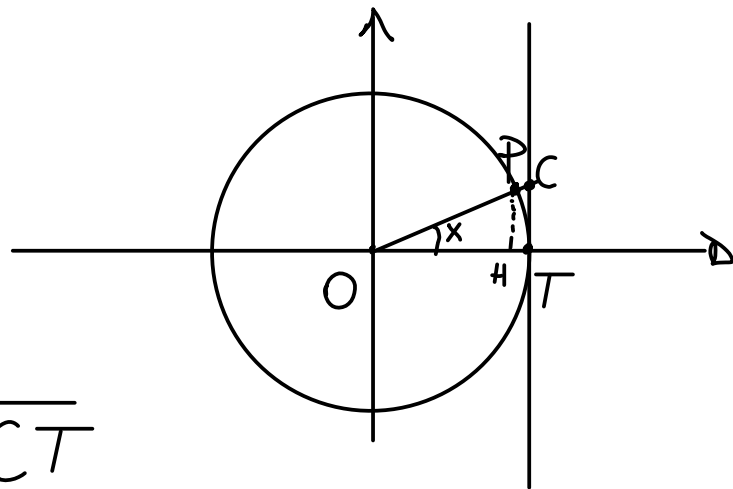
e $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$

Verifica del limite notevole seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \left(\text{Oss. che } \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} \text{ è pari} \right)$$

Dalla figura deduciamo che

$$S'_{O\hat{P}T} \leq S'_{O\hat{P}T} \leq S'_{O\hat{C}T}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2} \overline{OT} \cdot \overline{PH} \leq \frac{1}{2} \overline{OT}^2 \cdot x \leq \frac{1}{2} \overline{OT} \cdot \overline{CT}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \sin(x) \leq 1 \cdot x \leq 1 \cdot \tan(x) \Rightarrow \sin(x) \leq x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

divido tutto per $\sin(x)$ (che è positivo), allora

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

Oss. che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) = 1$; per il th. del confronto

applicato $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $h(x) = 1$ abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.