

Teorema [degli zeri]:

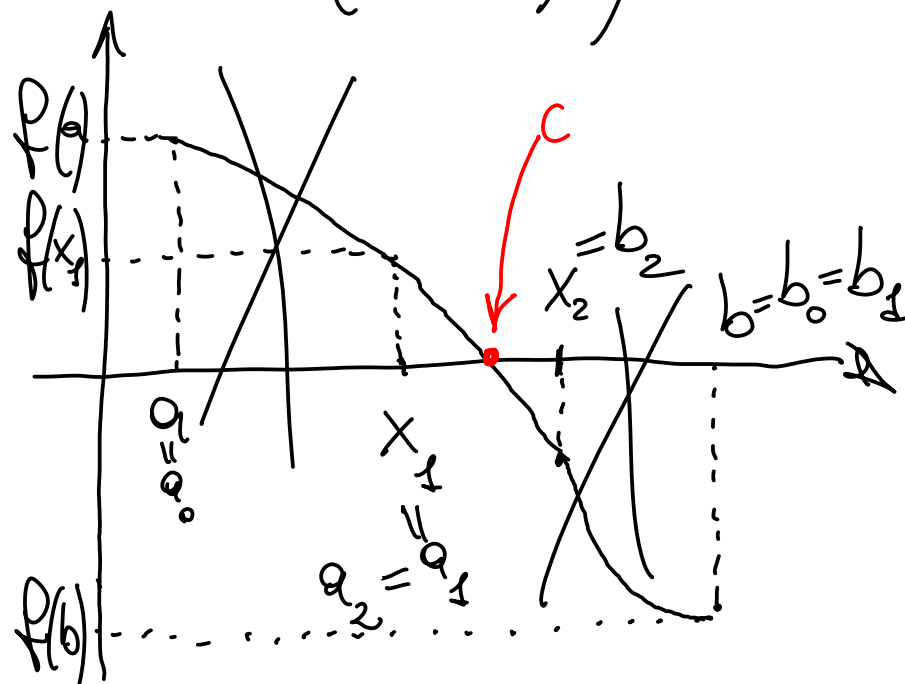
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- f è continua su tutto $[a, b]$ ($f \in \mathcal{C}([a, b])$)

- $f(a) \cdot f(b) < 0$

Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = 0$

Dim.: illustreremo il metodo di bisezione per risolvere $f(x) = 0$



definiamo $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, valuto $f(x_1)$

Se $f(x_1) \cdot f(a_0) < 0$, definiamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_1$
altrimenti se $f(x_1) \cdot f(a_0) > 0$, " $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$

In generale, dati a_n e b_n t.c. $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$,
definisco $x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ e se $f(x_n) = 0$ (stoppo e pago $C = x_n$)

oppure pago $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = x_{n+1}$ se $f(a_n) \cdot f(x_{n+1}) < 0$
invece " $a_{n+1} = x_{n+1}$ e $b_{n+1} = b_n$ se $f(a_n) \cdot f(x_{n+1}) > 0$.

Osservo che a_n è monotona crescente, mentre b_n è monotona decrescente.

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \bar{a} \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \bar{b} \in \mathbb{R}$$

Osservazione: $\bar{a} = \bar{b}$, poiché $|b_n - a_n| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}$

quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} |b_n - a_n| = 0$ e $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \bar{b}$, $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \bar{a}$

Osservo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \right)$
 $= f(\bar{a}) \cdot f(\bar{b}) = \left(f(\bar{a}) \right)^2 \geq 0$.

Siccome $\forall n \quad f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, allora per la permanenza
 del segno quando si passa a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) = \left(f(\bar{a}) \right)^2 = 0 \Rightarrow$ poiché $c = \bar{a}$. C.V.D.

Proposizione: Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$)

t.c. f e g sono continue in $x_0 \in D$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = f(x_0) \pm g(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \quad \text{quando } g(x_0) \neq 0$$

Corollario: Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$)

t.c. $f \in \mathcal{C}(D)$ e $g \in \mathcal{C}(D)$ (cioè f e g sono continue su tutto D , cioè $\forall x_0 \in D$) allora sono continue $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$

$f(x) \cdot g(x)$ e, quando $g(x_0) \neq 0 \forall x_0 \in D$, $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Proposizione: Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona (cioè $\forall x_1, x_2 \in D$ con $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) < f(x_2)$ quando f è

strettamente monotona crescente), allora
possiamo definire $f^{-1}: f(D) \rightarrow R$, dove la funzione
inversa f^{-1} è t.c. $\forall x \in D, f^{-1}(f(x)) = x$.

Def.: $\forall f: D \rightarrow R$, si dice che l'immagine di f
 $f(D) = \{f(x), \forall x \in D\}$

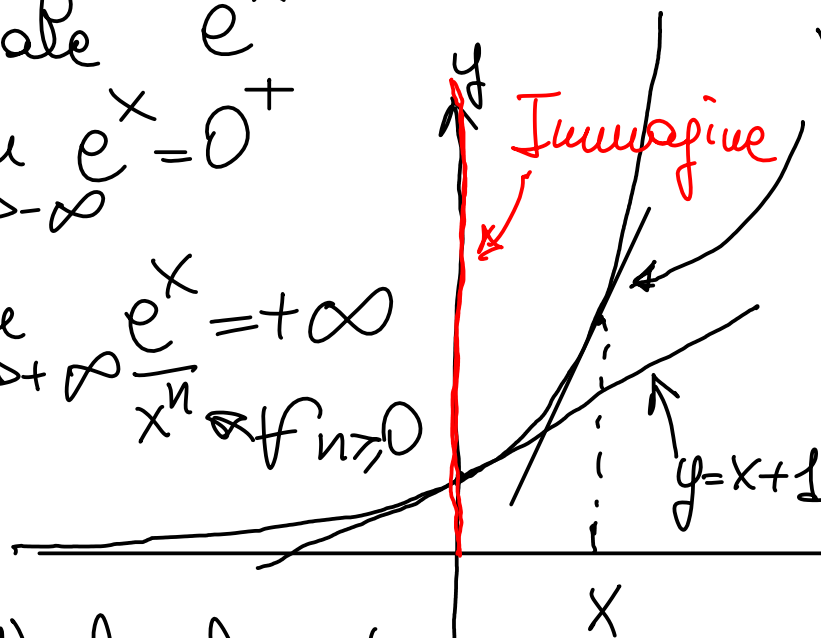
Funzione esponenziale e^x

x	$y = e^x$
0	1
1	$e \approx 2,71828$
2	$e^2 \approx 7.4$
3	e^3
-1	e^{-1}
-2	e^{-2}

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$x^n \ll e^x \text{ per } n \geq 0$$



$\forall x_0$ la retta
tangente in (x_0, e^{x_0})
al grafico sta sotto
al grafico stesso

In $(0, 1)$ il grafico è tangente a $y = x + 1$

è monotona
crescente!

Funzione Logaritmo $y = \log(x)$ ($\ln(x)$ alle superiori)
 $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$

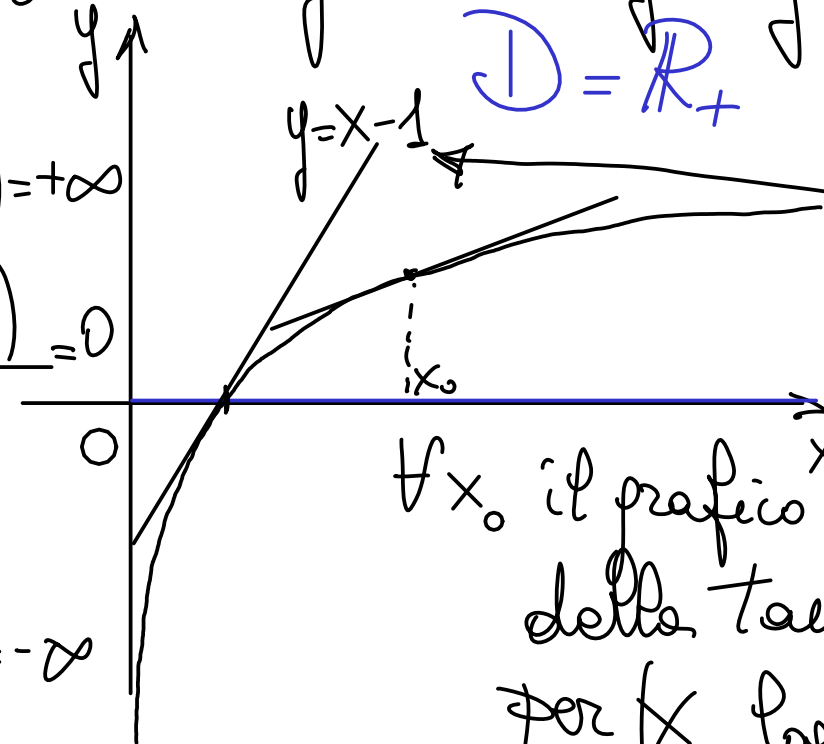
x	$y = \log(x)$
1	0
$e^{\pm 1}$	± 1
$e^{\pm 2}$	± 2
$e^{\pm 3}$	± 3
$e^{\pm 4}$	± 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$$

$$\forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$$

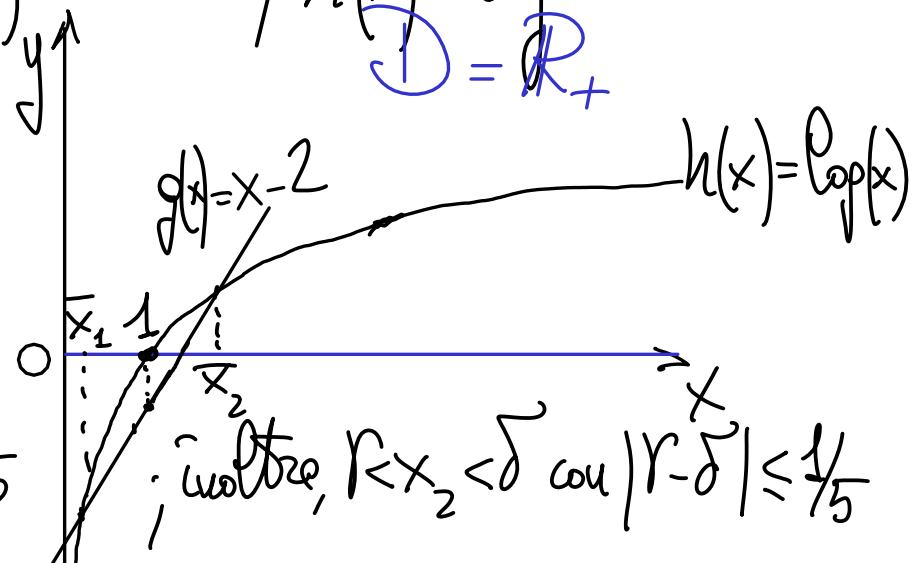


è la tangente
al grafico in $(1, 0)$

$\forall x_0$ il grafico sta al di sotto
della tangente passante
per $(x_0, \log(x_0))$

Esercizio: Siano $f(x) = x - 2 - \log(x)$, $g(x) = x - 2$, $h(x) = \log(x)$
 (quindi $f(x) = g(x) - h(x)$)

graficamente si capisce che $\exists \bar{x}_1, \bar{x}_2$
 t.c. $f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2) = 0$. Si determinino
 $\alpha, \beta < 1$ e $\gamma, \delta > 1$ t.c. $\alpha < x_1 < \beta$ e $|\alpha - \beta| \leq 1/5$



inoltre, $\gamma < x_2 < \delta$ con $|\gamma - \delta| \leq 1/5$

Procediamo per bisezione nell'intervallo $(0, 1]$, poiché
 $f(1) = 1 - 2 - \log(1) = -1$, $f(0) = ?$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 - \log(x) = +\infty$

Partiamo con $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$, poiché $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$

$$1^{\circ} \text{ passo} \quad x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{2} - 2 - \log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2 + \log(2) < 0 \Rightarrow a_1 = 0, b_1 = \frac{1}{2}$$

$$2^{\circ} \text{ passo} \quad x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x_2) = \frac{1}{4} - 2 + \log(4) < 0 \Rightarrow a_2 = 0, b_2 = \frac{1}{4}$$

$$3^{\circ} \text{ passo} \quad x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow f(x_3) = \frac{1}{8} - 2 + \log(8) = 0.2... > 0 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{8}, b_3 = \frac{1}{4}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{16} \pm \frac{1}{16} \quad \left(\alpha = \frac{1}{8}, \beta = \frac{1}{4} \right)$$

Partendo da $a_0 = 3$, $b_0 = 5$, determinare γ e δ .

Proposizione: Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$
 e $f(D) \subseteq D'$, se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$
 allora $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ è continua in x_0 .

Corollario: Se f e g sono come prima e $f \in \mathcal{C}(D)$, $g \in \mathcal{C}(D')$
 allora $g \circ f$ è continua su tutto D .

Esempi: (già fatti) $h(x) = \frac{1}{x^2+1} = g(f(x))$ dove $f(x) = x^2+1$
 $g(y) = \frac{1}{y}$
 $h(x) = \sin(1/x) = g(f(x))$ con $f(x) = 1/x$ e $g(y) = \sin(y)$
 $h(x)$ è continua $\forall x \neq 0$.

Inverse delle funzioni trigonometriche

x	$y = \arcsin(x)$
0	0
$\pi/6$	$1/2$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$