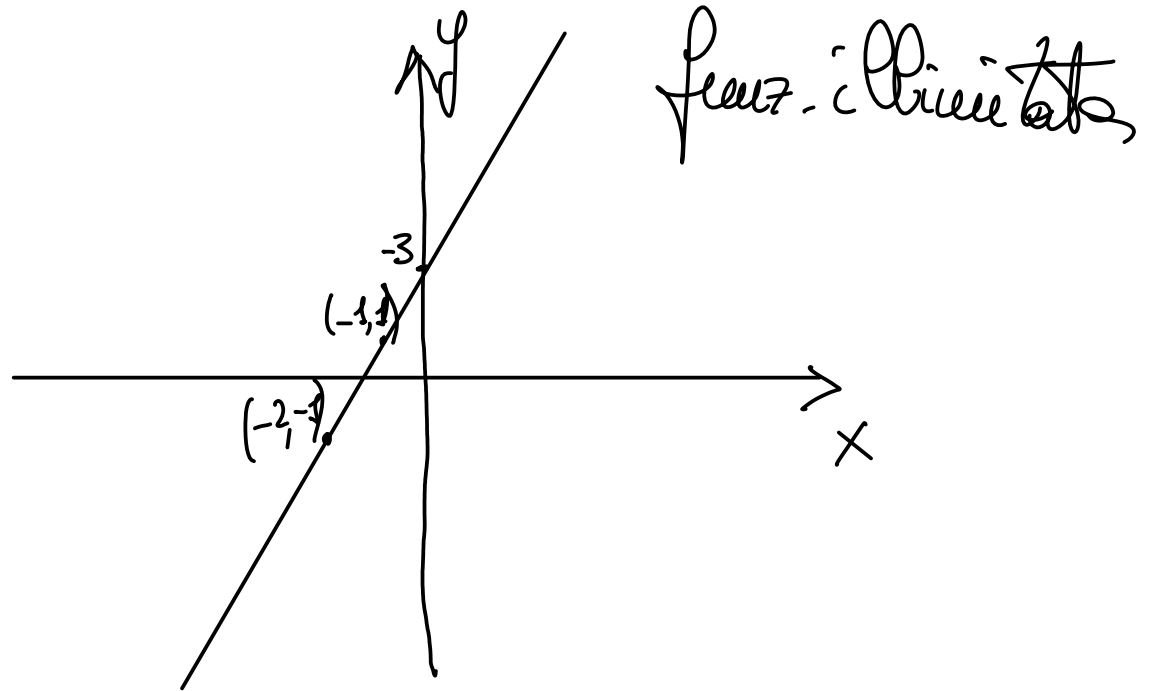


Def.: diciamo funzione numerica ^{ceppa di} una corrispondenza $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ dove il dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, che $\forall x \in D$ definisce in modo univoco $f(x)$ - della funzione f

Def.: diciamo che l'insieme $\{(x, f(x)) \mid \forall x \in D\}$ è il grafico.

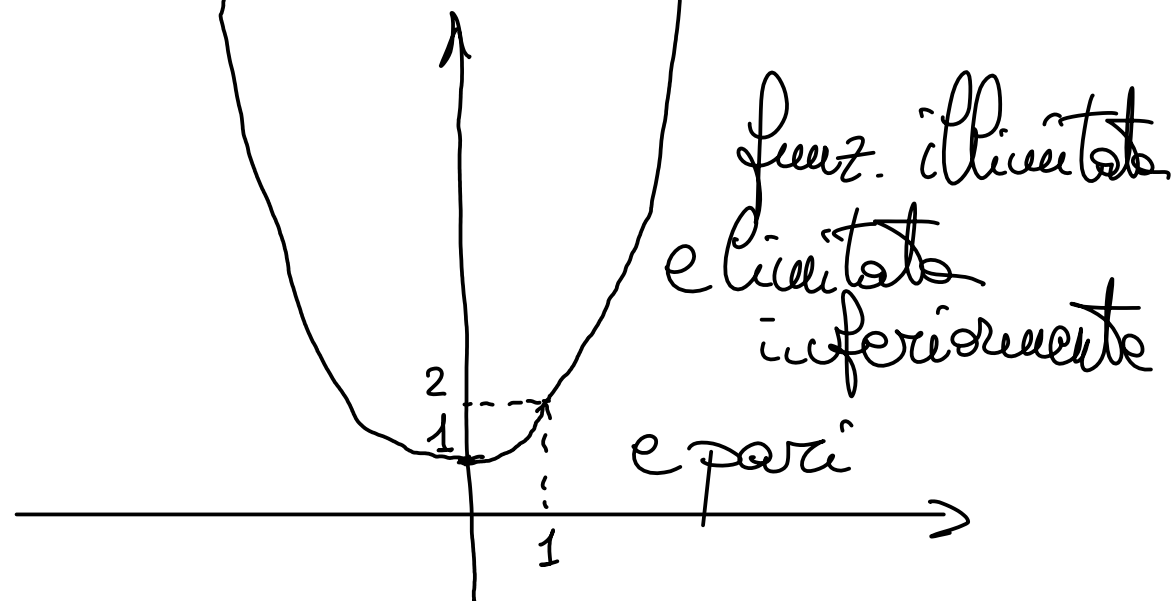
Esempi: $f(x) = 2x + 3$

x	$y = f(x)$
0	3
-1	1
-2	-1
1	5
2	7



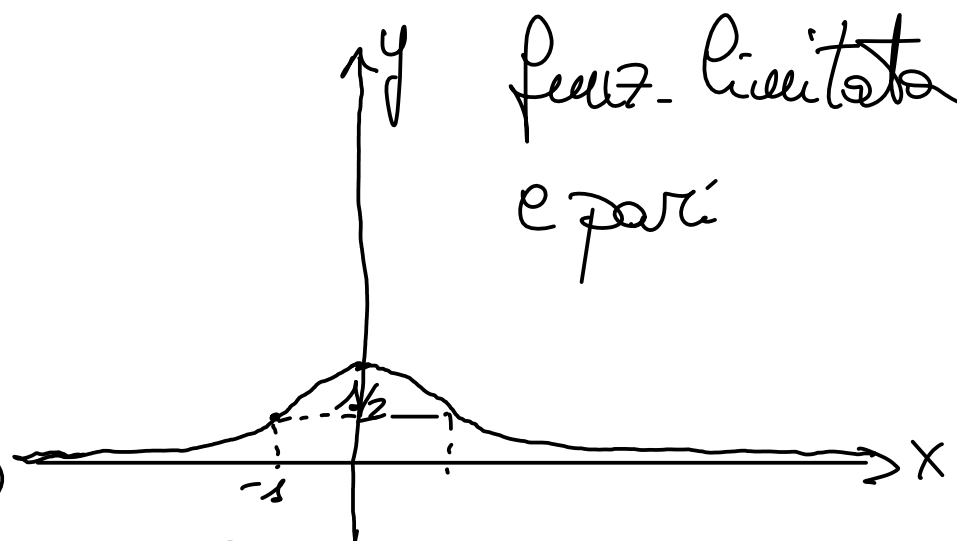
$$g(x) = x^2 + 1$$

x	$y = g(x)$
0	1
± 1	2
± 2	5
± 3	10



$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{g(x)}$$

x	$y = h(x)$
0	1
± 1	$1/2$
± 2	$1/5$
± 3	$1/10$



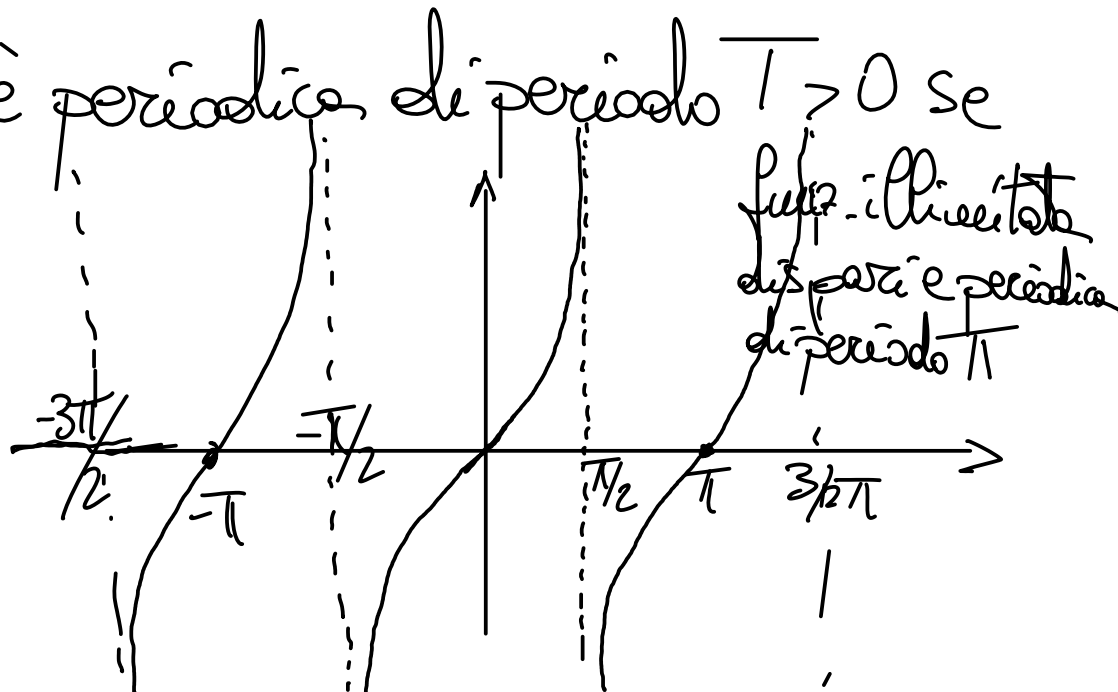
Def.: Si dice che una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (con $D \subseteq \mathbb{R}$) è limitata superiormente [inferiormente] se $\exists M \in \mathbb{R}$ [$m \in \mathbb{R}$] t.c. $\forall x \in D$
 $f(x) \leq M$ [$f(x) \geq m$].

Def.: si dice che $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) è limitata quando è limitata superiormente che inferiormente; si dice che è illimitata se non è limitata.

Def.: diciamo che una funz. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) è pari se $\forall x \in D \quad f(-x) = f(x)$; si dice dispari se $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$; se f è pari o dispari si dice che è simmetrica.

Def.: Si dice che $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ è periodica di periodo $T > 0$ se $\forall x \in D \quad f(x+T) = f(x)$.

Esempio: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



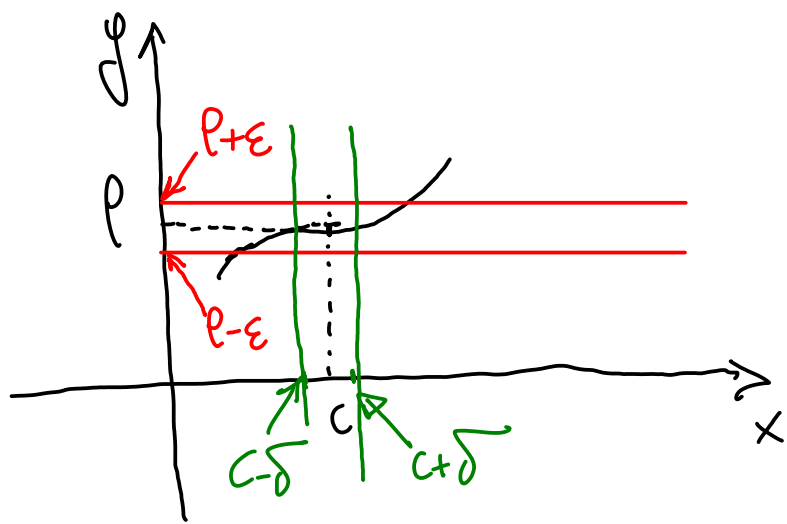
Def.: Si dice che una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) è monotona crescente [decrecente] $\forall x_1, x_2 \in D$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) \leq f(x_2)$ [$f(x_1) \geq f(x_2)$]. Si dice che f è strettamente monotona se non c'è bisogno dell' '=' -

Limiti di funzioni

Def.: Si dice che la funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) tende a l per x che tende a c quando $\forall \{x_n\}_{n \geq n_0}$ t.c. $x_n \in D \forall n \geq n_0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$ si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$ - Si scrive $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ -

Osservazione: nel caso in cui $l \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ la def. sopra è equivalente a quella sotto.

Def.: Si scrive che $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ quando $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in D, x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$ si ha che $|f(x) - l| < \varepsilon$



Def.: diciamo che una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) è continua in $x_0 \in D$ quando $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

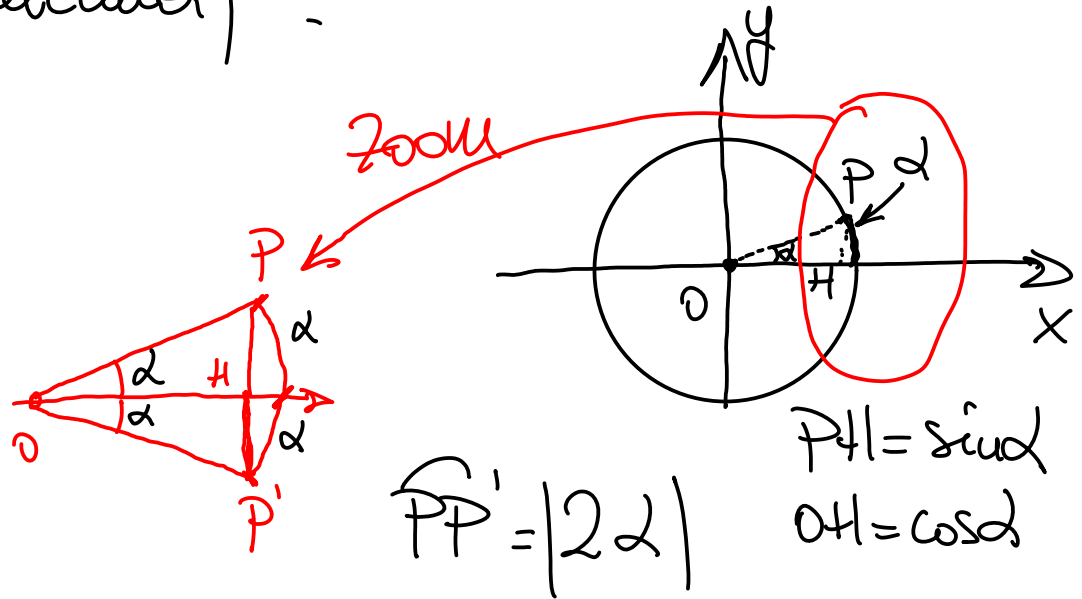
Diciamo che $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ è continua se è continua in ogni $x_0 \in D$.

Proposizione: $\forall c \in \mathbb{R}$ si ha che $\lim_{x \rightarrow c} \sin(x) = \sin(c)$
(cioè il seno è continuo).

Lemma 1: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sin(\alpha) = 0$

Per il "teorema della corda"

$$\overline{PP'} \leq \overline{PP'} \Rightarrow 2\overline{PH} = |2\sin(\alpha)|$$



$$\Rightarrow |\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$$

Sia $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

$$|\sin(x_n)| \leq |x_n|$$

$$-|x_n| \leq \sin(x_n) \leq |x_n|$$

$$\downarrow_{n \rightarrow +\infty}$$

$$0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x_n) = 0$$

$$\downarrow_{n \rightarrow +\infty}$$

$$0$$

C.V.D. (fine Lemma 1)

$$\text{Lemma 2: } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos(\alpha) = 1$$

Dim.: $\forall \{x_n\}_{n \geq n_0}$ t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \sin^2(x_n)} = 1$$

C.V.D. (fine Lemma 2)

Dim. proposizione: $\forall \{x_n\}_{n \geq n_0}$ t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$ calcoliamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\underbrace{x_n - c}_\alpha + \underbrace{c}_\beta) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin(x_n - c) \cdot \cos(c) + \cos(x_n - c) \cdot \sin(c) \right)$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x_n - c) \right) \cdot \cos(c) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos(x_n - c) \right) \cdot \sin(c)$$

$$= 0 \cdot \cos(c) + 1 \cdot \sin(c) = \sin(c)$$

qui ho applicato che

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

Esercizio: verificare che

$$\lim_{x \rightarrow c} \cos(x) = \cos(c)$$

[come prima a parte il fatto che si
deve applicare $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$]