

Def.: Si dice che $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è un infinito quando $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

Def.: Siano $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ e $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ due infiniti allora quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & (\text{caso 1}) \\ \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & (\text{ " } 2) \\ +\infty & (\text{ " } 3) \\ \cancel{\neq} & (\text{ " } 4) \end{cases}$$

diciamo che

nel caso 1 $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è un infinito di ordine inferiore risp. a $\{b_n\}_{n \geq n_0}$

" " 2 " " " dello stesso ordine " " "

" " 3 " " " di ordine superiore " " "

" " 4 " non è comparabile risp. a $\{b_n\}_{n \geq n_0}$

Siano $a_n = \sqrt{n}$ e $b_n = n$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad (\text{caso 1})$$

Siano $a_n = n$ e $b_n = \sqrt{n}$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad (\text{caso 3})$$

Siano $a_n = \sqrt{2(n-1)}$ e $b_n = \sqrt{n+1}$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2 \cdot \frac{n-1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{2}{n+1}} = \sqrt{2}$$

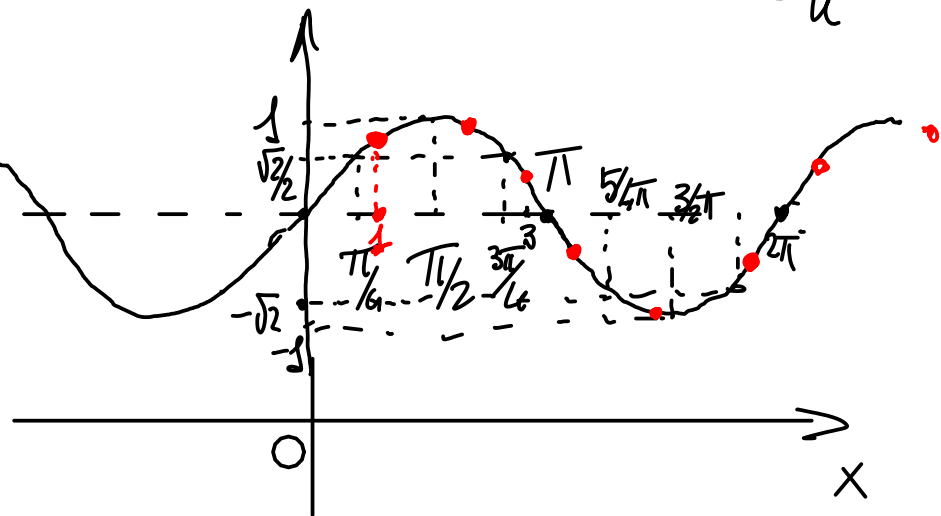
Siano nel caso 2, si scrive che $a_n = O(b_n)$

Nel sottocaso in cui $l=1$, si scrive che $a_n \sim b_n$ (a_n "è asintotico a" b_n)

Siano $a_n = 2n + n \sin(n)$ e $b_n = n$, allora
 osserviamo che a_n è un infinito poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + n \sin(n) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - n = +\infty$

Calcoliamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + n \sin(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \sin(n) = \text{non esiste}$

(siamo nel caso 4)



Def.: Si dice che $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è un infinitesimo
 quando $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Def.: Siano $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ e $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ due infinitesimi allora quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & (\text{caso 1}) \\ \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & (\text{ " } 2) \\ +\infty & (\text{ " } 3) \\ \nexists & (\text{ " } 4) \end{cases}$$

diciamo che

nel caso 1 $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è un infinitesimo di ordine superiore risp. a $\{b_n\}_{n \geq n_0}$
 " " 2 " " " dello stesso ordine " " "
 " " 3 " " " di ordine inferiore " " "
 " " 4 " non è comparabile risp. a $\{b_n\}_{n \geq n_0}$

Siano $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, siamo nel caso 1

Siano $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, siamo nel caso 3

Siano $a_n = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, " " " 1

Siano $a_n = \frac{1}{2n + n \sin(n)}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, " " " 4

Strategie di calcolo dei limiti sfruttando rel. asintotiche

Siano $a_n, b_n, c_n, a'_n, b'_n, c'_n$ delle successioni t.c.

$a_n \sim a'_n, b_n \sim b'_n, c_n \sim c'_n$ e dobbiamo calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n \cdot b_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a'_n} \cdot \frac{b_n}{b'_n} \cdot \frac{c'_n}{c_n} \cdot \frac{a'_n \cdot b'_n}{c'_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a'_n \cdot b'_n}{c'_n}$$

Se a'_n, b'_n, c'_n sono "più semplici" di a_n, b_n, c_n possiamo semplificare drasticamente il conto.

Gerarchia degli infiniti

$$(I) \quad \log n = o(n^\alpha) \quad \forall \alpha > 0 \quad \text{cioè} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n)}{n^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$(II) \quad n^\alpha = o(q^n) \quad \forall \alpha > 0 \text{ e } q > 1 \quad \text{"} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0 \quad \forall \alpha > 0, q > 1$$

$$(III) \quad q^n = o(n!) \quad \forall q > 1 \quad \text{"} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \quad \forall q > 1$$

$$(IV) \quad n! = o(n^n) \quad \text{"} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Verifica della rel. III: Sia $N > 2q$, allora

$$a_{n+1} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{q^n}{n!} \cdot \frac{q}{n+1} < \frac{1}{2} \frac{q^n}{n!} \leq \frac{1}{2} \cdot a_n \quad \forall n \geq N$$

$$\forall n \geq N, a_{n+1} \leq \frac{1}{2} a_n \leq \frac{1}{4} a_{n-1} \leq \dots \leq \frac{1}{2^{n-N}} a_N \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Esempio 1.12

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\log(n)^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = e^0 = 1$$

Esercizio 6 pag. 137

$$\frac{n^3 + 2n^2 + \sin(n)}{n + \log(n)} \sim ?$$

Osservo che $n^3 + 2n^2 + \sin(n) = n^3 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{\sin(n)}{n^3} \right)$

Consideriamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n^3} = 0$ poiché $a_n = -\frac{1}{n^3}$ e $c_n = \frac{1}{n^3}$

allora $a_n = -\frac{1}{n^3} \leq \frac{\sin(n)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3} = c_n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n^3} = 0$.

Riprendiamo da $u^3 \left(1 + \frac{2}{u} + \frac{\sin(u)}{u^3} \right) \sim u^3$

poiché $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3 \left(1 + \frac{2}{u} + \frac{\sin(u)}{u^3} \right)}{u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} (1 + 0 + 0) = 1$

Consideriamo il denominatore

$$u + \log(u) = u \left(1 + \frac{\log(u)}{u} \right) \sim u \quad \left(\text{Verifica: } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u \left(1 + \frac{\log(u)}{u} \right)}{u} = 1 \right)$$

Possiamo concludere che

$$\frac{u^3 + 2u^2 + \sin(u)}{u + \log(u)} \sim \frac{u^3}{u} \sim u^2$$

Citza nei pressi di es. 11 a pag. 138

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \sqrt{u^2 + u} - u = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{u^2 + u} - u) \cdot (\sqrt{u^2 + u} + u)}{\sqrt{u^2 + u} + u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2 + u - u^2}{\sqrt{u^2 + u} + u}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n} + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1/n} = 1.$$