

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$$

Verifico: $\forall \varepsilon \exists N \text{ t.c. } \forall n \geq N \quad \left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$

Consideriamo $\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+1}} - \frac{2}{n+1} - \cancel{1} \right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n+1 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

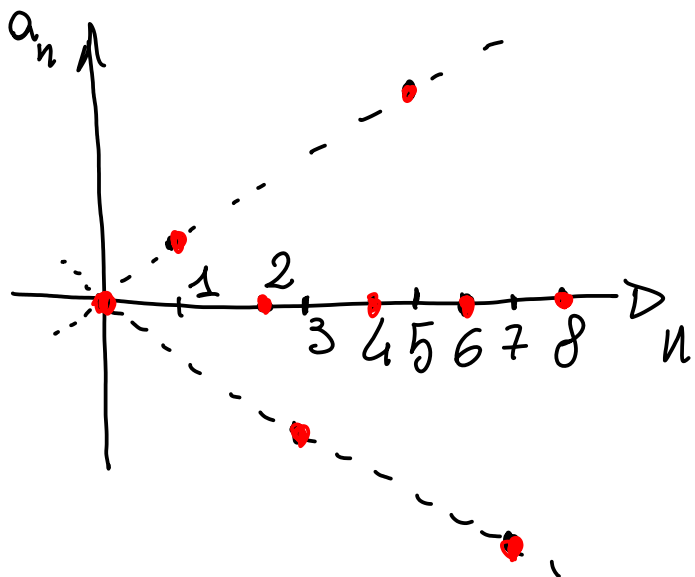
Poniamo $N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$, quindi $\forall n \geq N$ abbiamo che $n \geq \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil > \frac{2}{\varepsilon} - 1$

e quindi $\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{OK!}$

Def.: diciamo che $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è convergente [divergente] [inestabile]
 quando $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ [$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pm \infty$] [non è né convergente né diverg.]

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \quad (2^n \text{ è divergente})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \not\exists \quad \text{quindi } n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \text{ è irregolare}$$



Def.: diciamo che $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è una successione monotona crescente [decrescente] se $\forall n \geq n_0$ si ha che $a_n \leq a_{n+1}$ [$a_n \geq a_{n+1}$].

Diciamo inoltre che una successione è strettamente monotona se le diseg. precedenti valgono senza il segno di $=$.

Teorema: Sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è monotona crescente [decrescente]
allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup \{a_n\}_{n \geq n_0}$ [$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf \{a_n\}_{n \geq n_0}$].

Dim.: limitiamo al caso a_n crescente e $\sup\{a_n\}_{n \geq n_0} = s \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N$ t.c. $a_N > s - \varepsilon$, perché se ciò non fosse vero allora $\forall n \geq n_0, a_n \leq s - \varepsilon \Rightarrow s - \varepsilon$ è un maggiorante, ma $s - \varepsilon < s = \sup\{a_n\}$ e s è il minimo dei maggioranti.

Ne segue che $\forall n \geq N, a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_N \geq s - \varepsilon$

$$\Rightarrow s - \varepsilon < a_n \leq s$$

C.V.D.

— 0 —

Operazioni coi limiti

Proposizione. Siano $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ e $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ tali che

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \pm b_n = a \pm b, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (\text{se } b \neq 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^b = a^b \quad (\text{se } a > 0)$$

Esempio 1.7: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{5/2} - 3n + 7}{n^3 + \sqrt{n} - 3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{5/2}}{n^3} \cdot \frac{1 - \frac{3}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^{5/2}}}{1 + \frac{1}{n^{5/2}} - \frac{3}{n^2}}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{5/2}}{n^{3 \cdot 1/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Aritmetizzazione parziale del simbolo di ∞ .

Siano a_n, b_n, c_n t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = \pm \infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n + c_n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \cdot c_n = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{b_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^{c_n} = +\infty$$

Inoltre, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ e $a_n > 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = d \neq 0$ ($d \in \mathbb{R}$)

allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n}{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } d > 0 \\ -\infty & \text{se } d < 0 \end{cases}$

Osservazione: sono forme di indecisione le seguenti:

$$+\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty;$$

altre forme $0^0, \infty^0, 1^\infty$ si riconducono a forme di indecisione del tipo $0 \cdot \infty$, perché $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{b_n \log(a_n)}$ e a quel punto si studia $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \cdot \log(a_n)$

Def.: definiamo con e il numero di Nepero, cioè

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \simeq 2.71828 \dots$$

Lemma: si introduce $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ che è una successione crescente $\forall n \geq 1$
" " " $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ " " " decrescente $\forall n \geq 1$

Si osserva che $\frac{b_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$; inoltre $b_n > a_n \forall n \geq 1$.

Teorema [della permanenza del segno]: Sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ t.c.
 $a_n \geq 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ allora $a \geq 0$.

Oss.: non è vero che se $a_n > 0$ allora $a > 0$, esempio: $\frac{1}{n}$

Teorema [del confronto]: Sia dato $\{a_n\}_{n \geq n_0}$, $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ e $\{c_n\}_{n \geq n_0}$ tali che $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$.

Teorema [del confronto per successioni divergenti]: Sia dato $\{a_n\}_{n \geq n_0}$, $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ tali che $a_n \leq b_n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

Esempio 1.8: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = ?$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1 - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{n}+1 - \cancel{n}+1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0 \quad -$$