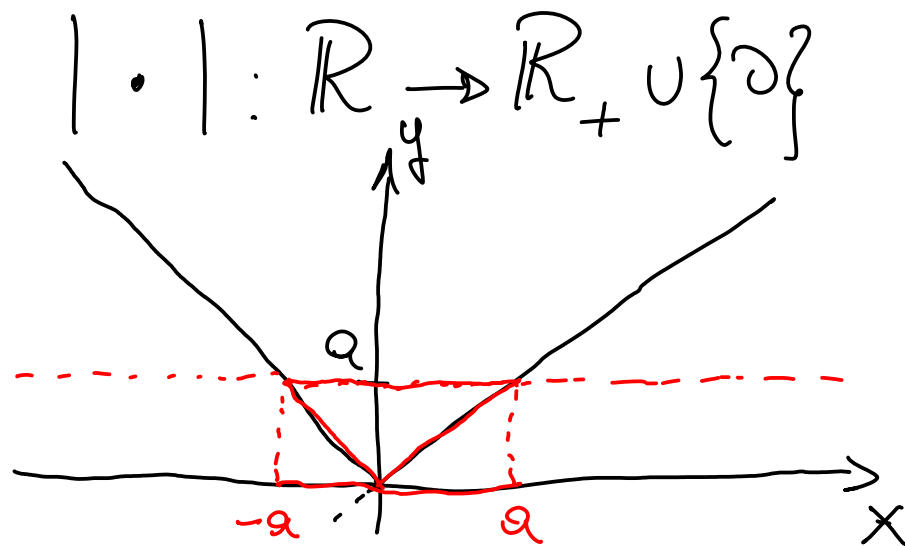


Valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

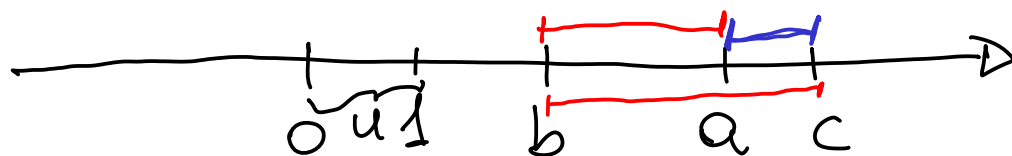
$$|x| \leq |x| \iff -|x| \leq x \leq |x|$$
$$|y| \leq |y| \iff -|y| \leq y \leq |y|$$

disuguaglianza
triangolare

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| \iff |x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Applichiamo la disug. triangolare a $x = a - b$, $y = b - c$

$$\Rightarrow |a - \cancel{b} + \cancel{b} - c| \leq |a - b| + |b - c|$$



Intervalli: Siano $a, b \in \mathbb{R}$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

Def.: diciamo che M [m] è un massimo [minimo] dell'insieme X se $M \in X$ [m $\in X$] e $\forall x \in X$ si ha che $x \leq M$ [x $\geq m$].

$$\text{Sia } A = \left\{ \frac{1}{n} \mid \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

$$\max A = 1 \quad \text{.} \quad \nexists \min A$$

$$\text{Sia } B = \left\{ -\frac{1}{n} \mid \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots \right\}$$

$$\min B = -1 \quad \nexists \max B$$

Def.: Diciamo che un numero M [m] è un maggiorante [minorante] per l'insieme X se $\forall x \in X$ si ha che $x \leq M$ [$x \geq m$].

Def.: Diciamo che un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è illimitato superiormente [inferiormente] se $\nexists$ maggioranti [minoranti].

Def.: $\forall$ insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente [inferiormente]
 denotiamo con $\sup X$ il minimo dei maggioranti
 [Inf X il massimo dei minoranti], cioè

$$\sup X = \min \{ M \in \mathbb{R} : \forall x \in X, x \leq M \}$$

$$[\inf X = \max \{ \mu \in \mathbb{R} : \forall x \in X, \mu \leq x \}]$$
.

Assioma [di Dedekind o completezza]: $\forall$ ogni insieme limitato
 Superiormente [inferiormente] $\exists$ il $\sup$ [l'inf].

Prop. $\mathbb{R}$ dotato di $+$, $\cdot$, $\leq$ forma un campo ordinato
 e completo.

$$\sup A = 1 \quad \inf A = 0 \quad .$$

$$\sup B = 0 \quad \inf B = -1 \quad .$$

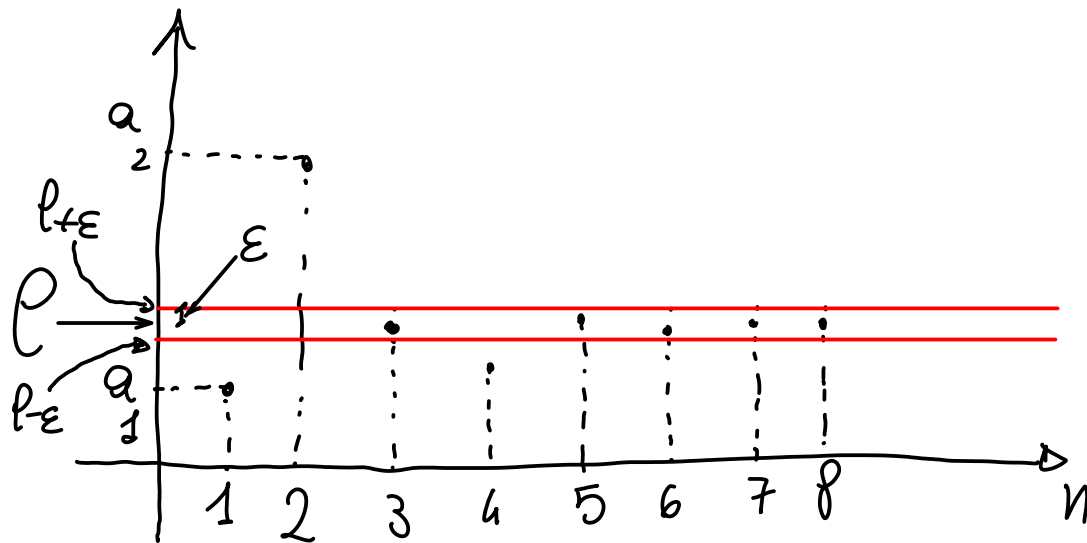
Def.: Si scrive che $\sup X = +\infty$ [$\inf X = -\infty$] quando l'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è illimitato superiormente [inferiormente] .

$\{a_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ si dice essere una successione

Def.: diciamo che la successione $\{a_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ tende a $l \in \mathbb{R}$ quando $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq N$ si ha che $|a_n - l| < \varepsilon$;
 si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$.

Def.: diciamo che la successione $\{a_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ tende a $+\infty$ $[-\infty]$ quando $\forall M > 0$ $[m < 0] \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$ si ha che $a_n > M$ $[a_n < m]$ e si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ $[-\infty]$.

Significato grafico del limite



Proposizione: Se il limite di una successione esiste, allora è unico.
 Dim.: Supponiamo, per assurdo, che esistano due limiti $l_1 \neq l_2$ della successione a_n . Poniamo $\Delta = |l_1 - l_2|$, definiamo

$\varepsilon = \frac{\Delta}{2}$. Siccome $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_1$ allora $\exists N_1 \text{ t.c. } \forall n \geq N_1 \quad |a_n - l_1| < \varepsilon$.

Siccome $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_2$ allora $\exists N_2 \text{ t.c. } \forall n \geq N_2 \quad |a_n - l_2| < \varepsilon$.

Ne segue che $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

abbiamo che

$$\Delta = |l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2|$$

$$\leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \underline{\underline{\frac{\Delta}{2}}}$$

$\Rightarrow \Delta \leq \frac{\Delta}{2}$ assurdo! $l_1 = l_2$, cioè il limite è unico
C.V.D.

