

$\mathbb{Q}$ è un campo ordinato

$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ è un campo rispetto alle operazioni $\oplus_7$ e $\odot_7$

Siano $a, b \in \mathbb{Z}_7$ allora $a \oplus_7 b = a + b \bmod 7$

$n \bmod 7 = r$ dove $n = 7 \cdot q + r$ $a \odot_7 b = a \cdot b \bmod 7$
con $n, q, r \in \mathbb{N}$

Esempi: -2 in $\mathbb{Z}_7$? è 5 perché $2 \oplus_7 5 = 0$
 -3 in $\mathbb{Z}_7$? è 4 " $3 \oplus_7 4 = 0$

$(3)^{-1}$ in $\mathbb{Z}_7$? è 5 perché $3 \odot_7 5 = 15 \bmod 7 = 1$

$(4)^{-1}$ in $\mathbb{Z}_7$? è 2 perché $2 \odot_7 4 = 8 \bmod 7 = 1$.

$\mathbb{Z} \subseteq \text{in } \mathbb{Z}_7!$ diciamo che $a \leq_7 b$ se $a \leq b$

ad es. possiamo dire che $2 \leq_7 5$ e $0 \leq_7 3$

Tutto bello ma $2 \odot_7 3 = 6$ e $6 \leq_7 1$

$$\text{e } 5 \leq_7 3 = 1$$

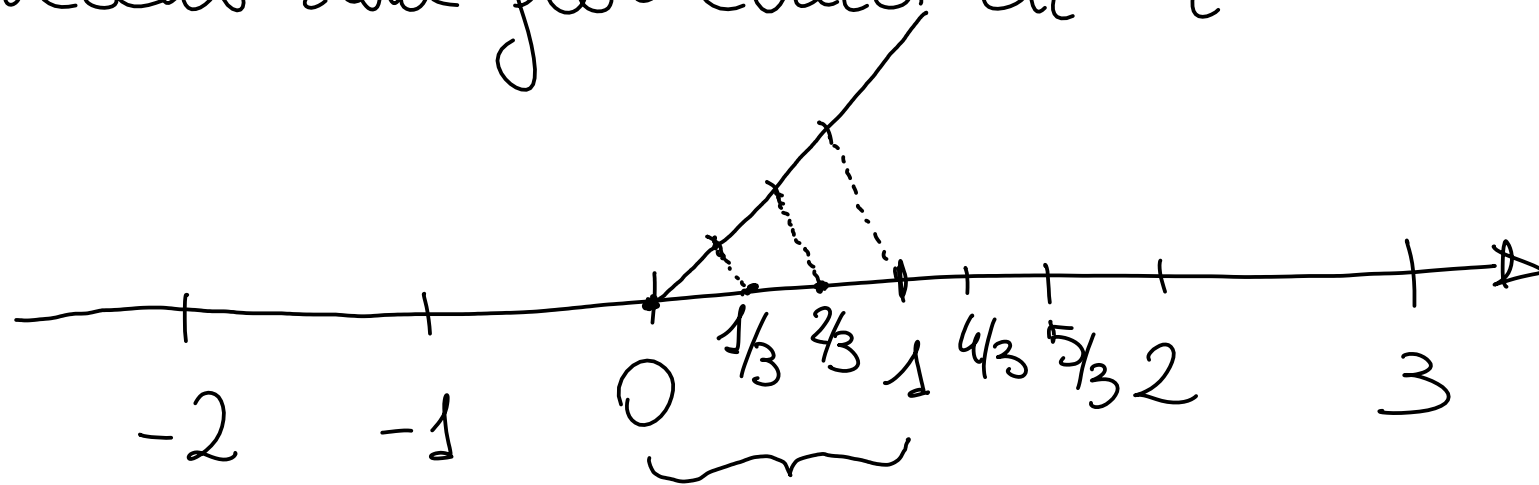
$\Rightarrow \mathbb{Z}_7$ NON è un campo ordinato

Prop.: Rapp. decimale dei numeri razionali può essere finita o infinita, ma se è infinita è periodica

dica

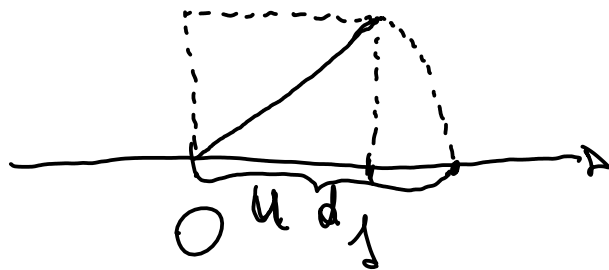
$$\text{Es.: } 0.\overline{7} = \frac{7}{9}$$

Rappresentazione geometrica di $\mathbb{Q}$



Il numero $\frac{m}{n}$ $\exists$ il punto corrispondente sulla retta orientata.

Teorema [dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al lato]:
 Sia $d^2 = 2u^2$ allora $\nexists \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ t.c. $\frac{m^2}{n^2} = 2$.



Dim. (per assurdo): Ammettiamo che esista $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$
t.c. $\frac{m^2}{n^2} = 2$. Osservo che $m, n \in \mathbb{N}$ inoltre $\text{H.C.D.}\{m, n\} = 1$.

Siccome $m^2 = 2n^2 \Rightarrow m$ è pari $\Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}$ t.c.

$m = 2p \Rightarrow 2p^2 = n^2 \Rightarrow n^2 = 2p^2$. Ne segue che n è pari,
quindi m, n sono entrambi pari $\Rightarrow \text{H.C.D.}\{m, n\} \geq 2 \Rightarrow$ assurdo.
Ne segue che $\nexists m, n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{m^2}{n^2} = 2$. C.V.D.

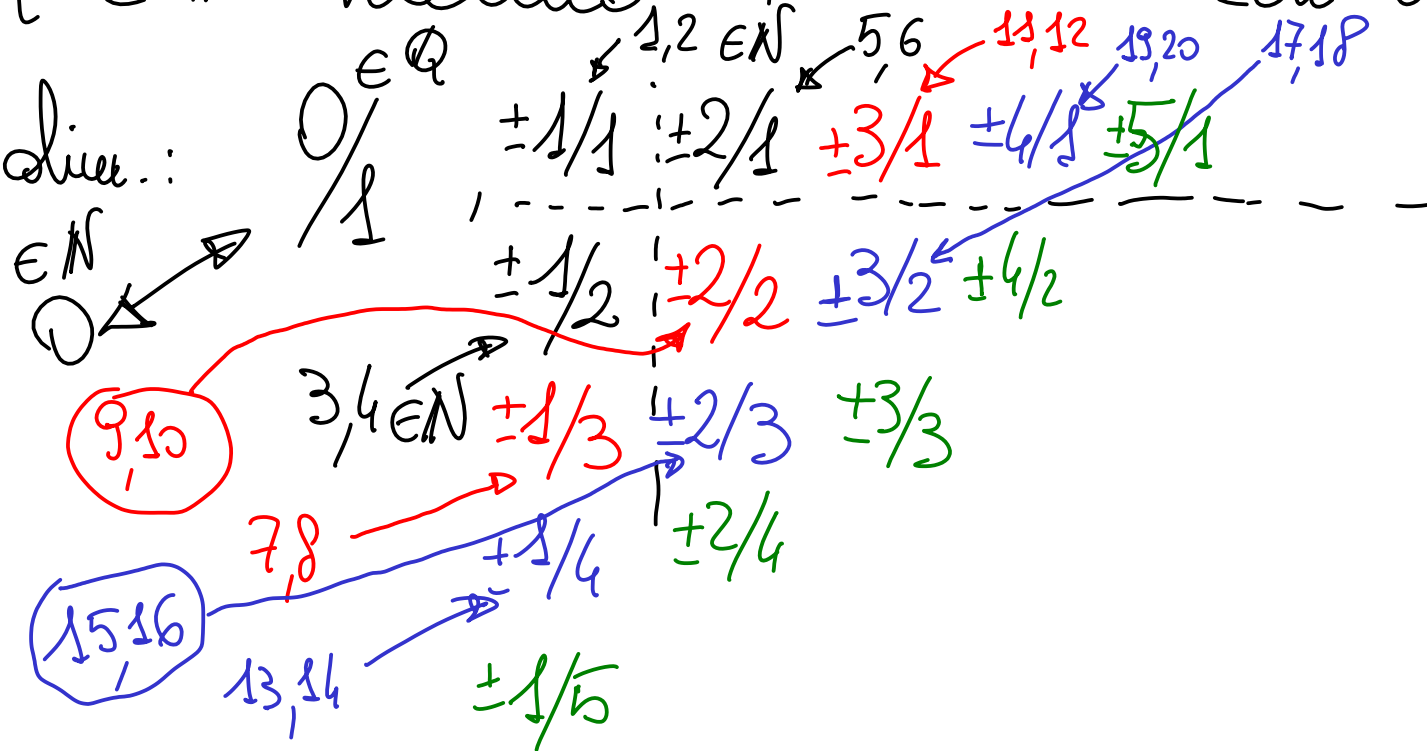
Def.: I numeri reali sono t.c. la loro rappresentazione
decimale può essere finita o infinita, se è infinita
può essere periodica oppure non periodica. (si indicano
con $\mathbb{R}$).

Assioma di completezza: esiste una relazione biunivoca
tra i reali e i punti sulla retta orientata (cioè ogni punto è rapp. come un numero).

Def.: Diciamo che due insiemi hanno la stessa cardinalità se si può istituire una corrispondenza biunivoca tra di loro.

Prop.: $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ hanno la stessa cardinalità.

Geni alle die.



Def.: Si dice che $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^2, \dots$ hanno la potenza del numerabile.

Def.: Si dice che un insieme B ha potenza superiore rispetto ad A se B non può essere in corrisp. biunivoca con A e $A \subset B$.

Teorema: $\mathbb{R}$ non può essere messo in corrisp. biunivoca con $\mathbb{N}$ (o con $\mathbb{Q}$)

Corollario: $\mathbb{R}$ ha potenza superiore rispetto a $\mathbb{Q}$.

Def.: Si dice che $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{C}, \dots$ hanno la potenza del continuo.

Def.: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si dice l'insieme dei numeri irrazionali.

Prop.: Sia $x \in \mathbb{R}$, con $x \geq 0$, allora $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
 $\exists! y \in \mathbb{R}, y \geq 0$ t.c. $x^{1/n} = y$ (cioè $y^n = x$)

“esiste ed è unico”.

Proprietà fondamentali delle potenze (e di esp. e di log.)

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}_+$

$$\bullet a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b$$

$$\bullet a^b \cdot a^c = a^{b+c} \quad 2^3 \cdot 2^5 = 2^8$$

$$\bullet (a^b)^c = a^{b \cdot c} \quad (2^2)^3 = 2^6$$

Consideriamo x^n come potenza quando la base x è variabile e l'esp. n è fisso.

||

a^x come esponenziale quando l'esp. x è variabile e a è fisso.

Def.: Siano $a, x, y \in \mathbb{R}$ e positivi t.c.

$a^x = y$ allora diciamo che $\log_a y = x$ $\leftarrow$ ("logaritmo in base a di y ")

Proprietà:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a(b)^c = c \log_a b$$

$$\log_a(c) = \frac{\log_b(c)}{\log_b(a)}$$