

Codice Teams: d Oapp20
zero

Sia $\{a_n\}_{n=1}^N$ una successione finita, cioè

$$\{a_n\}_{n=1}^N = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$$

Esempi: $\{a_j\}_{j=3}^7 = \left\{ \frac{j-1}{j^2} \right\}_{j=3}^7 = \left\{ \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \frac{5}{36}, \frac{6}{49} \right\}$

Def.: indichiamo con il simbolo (detto di sommatoria)

$$\sum_{i=j_0}^N a_i = a_{j_0} + a_{j_0+1} + a_{j_0+2} + \dots + a_N$$

Esempio: $\sum_{j=3}^7 \frac{j-1}{j^2} = \frac{2}{9} + \frac{3}{16} + \frac{4}{25} + \frac{5}{36} + \frac{6}{49}$

Proprietà elementari delle somme:

- $\sum_{j=1}^n c \cdot a_j = c \cdot \sum_{j=1}^n a_j$ (dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante)

Verifica: $\sum_{j=1}^n c \cdot a_j = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n = c \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$
 $= c \cdot \sum_{j=1}^n a_j$ (per la distributività di $\cdot$ risp. $+$)

- $\sum_{j=1}^N (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^N a_j + \sum_{j=1}^N b_j$ (per la commutatività delle somme)

- $\sum_{j=1}^N c = N \cdot c$ (per definizione di prodotto).

$$\bullet \sum_{j=1}^{\underline{N+1}} a_j = \sum_{j=1}^{\underline{N}} a_j + \sum_{j=N+1}^{\underline{N+1}} a_j \quad (\text{applicando l'associatività di } +)$$

Alcune sommatorie famose "per ogni"

$$\sum_{j=0}^{\underline{N}} q^j = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \quad \text{quando } q \neq 1 \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Verifica: $(1 - q) \cdot \sum_{j=0}^{\underline{N}} q^j = \sum_{j=0}^{\underline{N}} (1 - q) \cdot q^j = \sum_{j=0}^{\underline{N}} (q^j - q^{j+1}) =$

$$= \sum_{j=0}^{\underline{N}} q^j - \sum_{j=0}^{\underline{N}} q^{j+1} = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^N} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \dots - \cancel{q^N} - q^{N+1}$$

$$= 1 - q^{N+1}$$

$$\sum_{j=1}^N j = \frac{N \cdot (N+1)}{2} \quad \forall N \geq 0$$

Verifica: Procediamo per induzione.

Dapprima verifichiamo il "caso base", cioè (per questo uguagliante) è il caso $N=0$:

$$\sum_{j=1}^0 j = 0 \quad \text{che è uguale a} \quad \frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0.$$

Il caso generale si verifica per induzione, cioè si ipotizza che l'equazione $\sum_{j=1}^N j = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$ sia stata verificata fino a N e adesso la verifichiamo per il caso $N+1$.

$$\sum_{j=1}^{N+1} j = \sum_{j=1}^N j + N+1 = \frac{N \cdot (N+1)}{2} + (N+1) = (N+1) \cdot \left(\frac{N}{2} + 1\right) \\ = \frac{(N+1) \cdot (N+2)}{2}$$

Def.: indichiamo con il simbolo di prodotto la
 seguente espressione $\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$

Def.: diciamo fattoriale di n l'espressione seguente

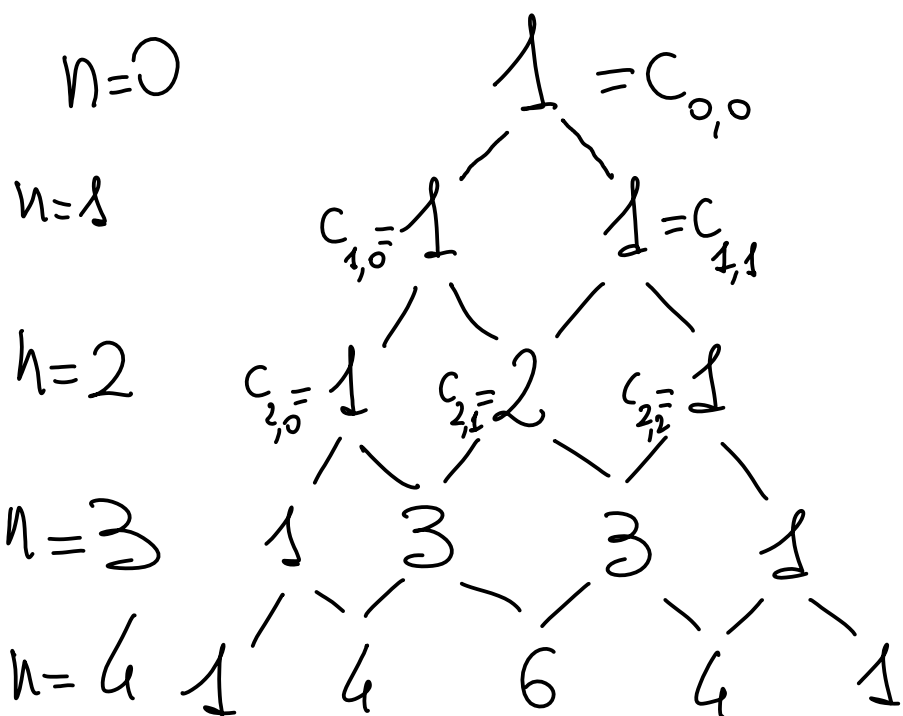
$$n! = \prod_{j=1}^n j = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Def. (equivalente e ricorsiva): $n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n>0 \end{cases}$

Consideriamo $(a+b)^n = \sum_{j=0}^n c_{nj} a^j b^{n-j}$

dove c_{nj} è il coefficiente binomiale

$$c_{nj} = \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} ; \quad c_{nj} \text{ può essere calcolato con l'albero di Tartaglia}$$



$$\Rightarrow (a+b)^0 = 1$$

$$\Rightarrow (a+b)^1 = a+b$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\Rightarrow (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Proprietà dei numeri razionali (insieme $\mathbb{Q}$)

(PS1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ (prop. associativa) Siano $a, b, c \in \mathbb{Q}$

(PS2) $a+b = b+a$ (prop. commutativa) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$

(PS3) $\exists 0 \in \mathbb{Q}$ t.c. $a+0 = a$ (el. neutro)

(PS4) $\exists (-a) \in \mathbb{Q}$ t.c. $a+(-a) = 0$ (l'inverso risp. $+$)

(PP1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatività di $\cdot$)

(PP2) $a \cdot b = b \cdot a$ (commutatività del $\cdot$)

(PP3) $\exists u \in \mathbb{Q}$ t.c. $a \cdot u = a$ ($\exists$ el. neutro del $\cdot$)

(PP4) Se $a \neq 0$ $\exists (a^{-1}) \in \mathbb{Q}$ t.c. $a \cdot (a^{-1}) = u$ ($\exists$ inverso risp. $\cdot$)

(PSP) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (prop. distributiva della somma risp. $\cdot$)

$$\frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

la relazione $\leq$
 è una relazione di
 ordinamento totale in $\mathbb{Q}$
 comunque dati a e $b \in \mathbb{Q}$
 si può stabilire se $a \leq b$ o $b \leq a$.

(PSM) Se $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

Es.: $x + 2 \leq 0 \Rightarrow x + \cancel{2} - \cancel{2} \leq 0 - 2$
 $\Rightarrow x \leq -2$

(PSP) Se $a \leq b$ e $0 < c \Rightarrow c \cdot a \leq c \cdot b$

Es.: $2x \leq 3 \Rightarrow \cancel{2}x \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \leq 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$