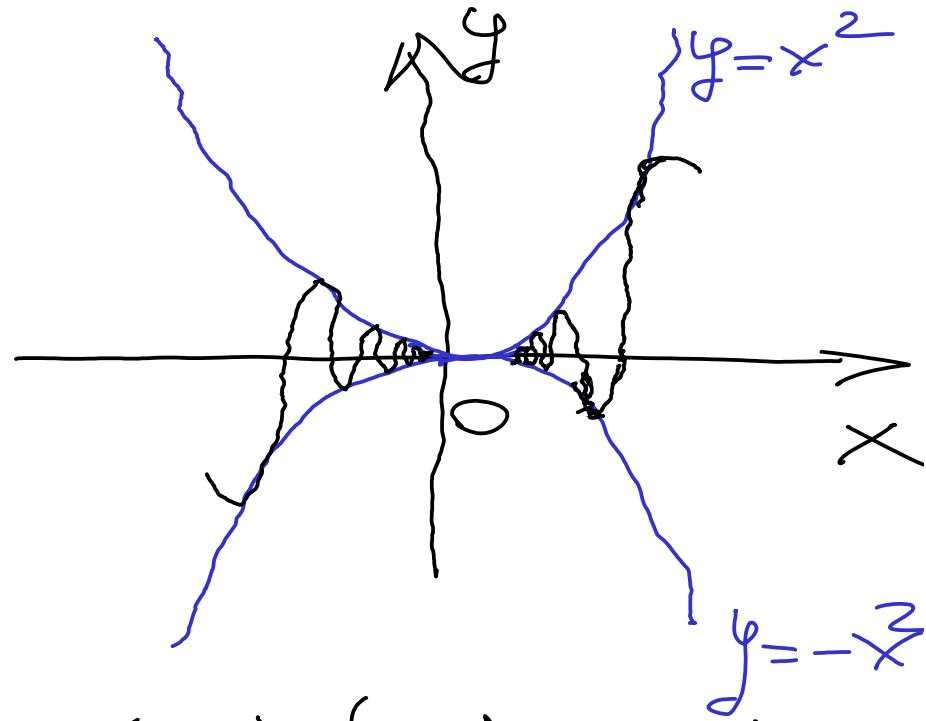


Si consideri $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$$



$$f'(x) = 2x \sin(1/x) + x^2 \cos(1/x) \cdot \left(-1 \cdot \frac{1}{x^2}\right)$$

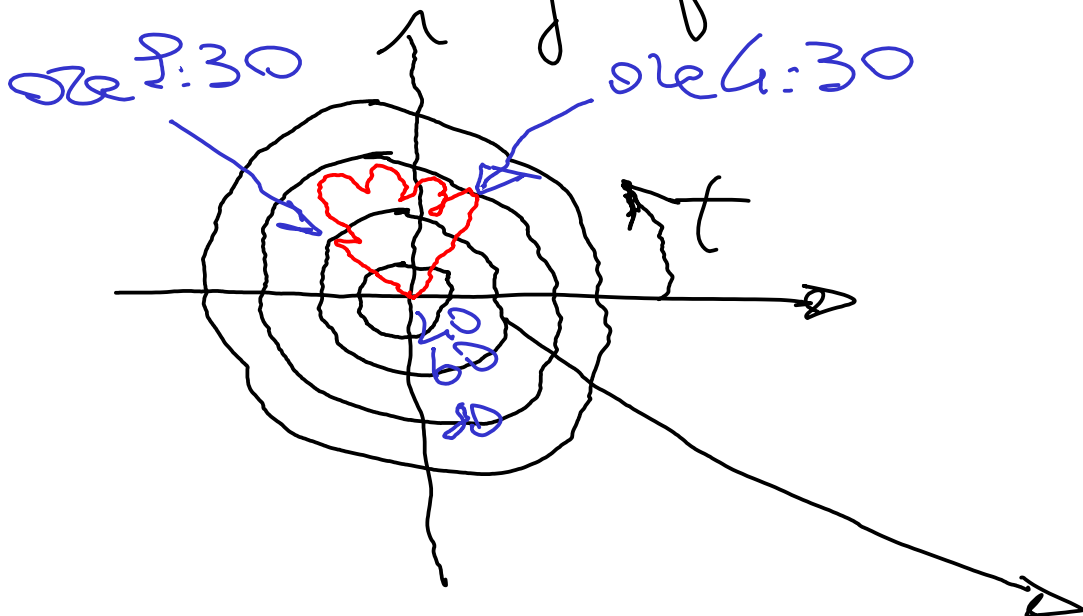
$$= 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

oss: $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) = \text{non esiste} \neq f'(0)$

Introduzione al calcolo integrale

Esempio:

il tachipista

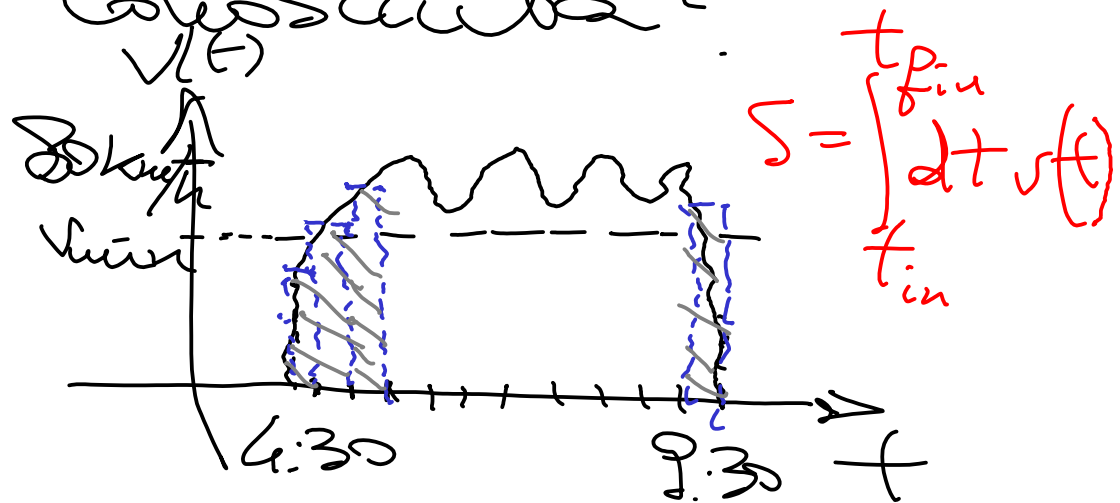


Situa di Cesare

$$s(t) = v(t) \cdot \Delta t$$

Domanda:

lo spazio percorso
è in accordo a quella
coscienza?



per velocità costante
o per piccoli Δt .

$$V_{\min} \cdot \Delta T \leq S(5h) \leq V_{\max} \cdot \Delta T$$

$\overset{\text{"}}{60 \text{ km/h}} = 5h$
 $\overset{\text{"}}{80 \text{ km/h}} = 5h$

Un calcolo "più accurato" dello spazio percorso si effettua suddividendo le aree tratteggiate. Sarà tanto più accurato quanto più le basi dei rettangoli saranno piccole. Lo spazio totale percorso sarà uguale all'area sottesa dal grafico.

Def.: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice
 somma di Cauchy-Riemann
 (Coscì-Riemann) la sommatoria
 seguente:

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot \frac{b-a}{n}$$

dove $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ con $x_j = a + \frac{b-a}{n} \cdot j \quad \forall j=0, \dots, n$

Oss. che $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n}$, quindi
 $\{x_j\}_{j=0}^n$ è una coppia equidistante
 tra a e b .

Teorema: Sia $f \in \mathcal{C}([a, b])$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)$$

converge a un valore $P \in \mathbb{R} \quad \forall$ scelta

di $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \forall i=1, \dots, n$

Def.: Diciamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =: \int_a^b dx f(x)$
è il valore dell'integrale della funzione
 f in $[a, b]$.

Prop.: $\int$ è lineare, cioè

$\forall f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vale

Piuguaglianza
$$\int_a^b d \times \{ \alpha f(x) + \beta g(x) \} =$$
$$= \alpha \int_a^b d \times f(x) + \beta \int_a^b d \times g(x)$$

se questi ultimi 2 integrali esistono.

Verifica:
$$\int_a^b d \times \{ \alpha f(x) + \beta g(x) \} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \{ \alpha f(\xi_j) + \beta g(\xi_j) \}$$
$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) +$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n g(\xi_j)$$

$$= \alpha \int_a^b dx f(x) + \beta \int_a^b dx g(x)$$

Prop. di additività $\forall f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 e integrabile in $[a, b]$ si ha che

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^c dx f(x) + \int_c^b dx f(x)$$

$$\forall c \in [a, b] -$$

Per convenzione si pone $\int_b^a dx f(x) = - \int_a^b dx f(x)$

Proprietà (monotonia rispetto all'integrale)

Siano f, g integrabili in $[a, b]$ t.c.

$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, allora

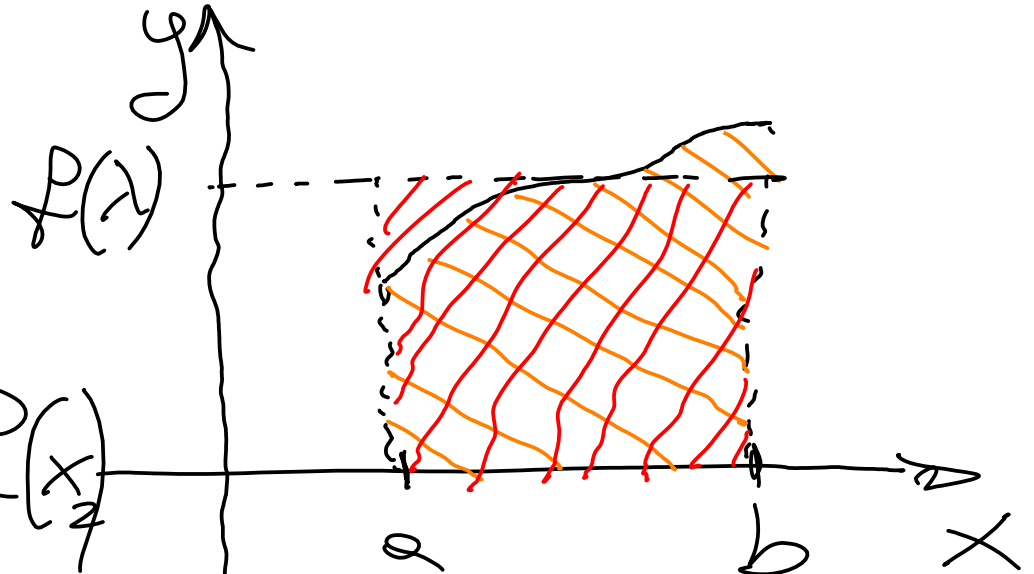
$$\int_a^b dx f(x) \leq \int_a^b dx g(x) -$$

Teorema (della media integrale): Sia

$f \in \mathcal{C}([a, b])$, allora $\exists \lambda \in [a, b]$ t.c.

$$f(\lambda) = \frac{\int_a^b dx f(x)}{b-a}$$

Dim.: Per il th. di Weierstrass $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ t.c. $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$



Poniamo $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$, allora

$$m \cdot (b-a) = \int_a^b dx \, m \leq \int_a^b dx \, f(x) \leq \int_a^b dx \, M = M \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b dx \, f(x)}{b-a} \leq M$$

Per il th. dei valori intermedi $\exists \lambda \in [a, b]$

t.c.
$$f(1) = \frac{\int_a^b dx f(x)}{b-a} \quad \text{C.V.D.}$$

Teorema (fondamentale del calcolo integrale):

Sia $f \in \mathcal{C}([a,b])$ t.c. $\exists F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$
 che soddisfa $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$
 (con F continuo in $[a,b]$) allora

$$\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a)$$

Dim. $\therefore$ Poniamo $F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^n F(x_j) - F(x_{j-1})$

dove $x_j = \frac{b-a}{n} \cdot j \quad \forall j=0, \dots, n$.

Vale l'uguaglianza, poiché

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n F(x_j) - F(x_{j-1}) &= \cancel{F(x_1)} - F(a) + \cancel{F(x_2)} - \cancel{F(x_1)} \\ &\quad + \cancel{F(x_3)} - \cancel{F(x_2)} + \dots + F(b) - \cancel{F(x_{n-1})} \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

$\forall j$ si ha che in $[x_{j-1}, x_j]$ sono soddisfatte le ip. del teoz. di Lagrange per $f \Rightarrow \exists c_j \in (x_{j-1}, x_j) t.c.$

$$\frac{F(x_j) - F(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = F'(c_j) = f(c_j)$$

$$\Rightarrow F(x_j) - F(x_{j-1}) = f(c_j) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(b) - F(a) &= \sum_{j=1}^n F(x_j) - F(x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n f(c_j) \cdot \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b dx f(x)$$

(C.V.D.)