

Numeri complessi

$$\sqrt{-1} =: i \in \mathbb{R}$$

Def.: Si dice che $z = a + ib$, con i detta
unità immaginaria e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
è un numero complesso

"relazione binaria"

$$\Rightarrow \mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

$z = a + ib$ si dice forma algebrica dei numeri
complessi.

Definiamo somma e prodotto
di due numeri complessi

$$z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id :$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Osserviamo che se $z = a + ib \neq 0$, allora

$$(z)^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}. \text{ Infatti, } z \cdot (z)^{-1} = \frac{\cancel{a^2 + b^2} + i(\cancel{-ab + ab})}{\cancel{a^2 + b^2} \cdot 1} = 1$$

Proposizione: $\mathbb{C}$, munito delle operazioni di somma e prodotto forma un campo -

Osservazione: $\mathbb{C}$ non è un campo ordinato.

Def.: Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$ diciamo che $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ è il suo modulo -

Def.: Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$ diverso
che $\bar{z} = a - ib$ è il suo complesso coniugato.

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \quad \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{\bar{z} \cdot \overline{\bar{z}}} = \sqrt{\bar{z} \cdot z} = |z|.$$

Verso la formula di Eulero $\left(e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \right)$

Espressioni in serie di Taylor
di alcune funzioni notevoli

Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

dove $c \in (x-x_0)$ -

$\Rightarrow$ se $\left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| < M \in \mathbb{R}$ allora

il resto $\left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$


 si dice essere l'espansione
 in serie di potenze (o serie
 di Taylor) della funzione $f(x)$.

Caso: $f(x) = \sin x$ con $x_0 = 0$ -

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -\sin x \Big|_{x=0} = 0$$

$$f'''(0) = -\cos x \Big|_{x=0} = -1, \quad f^{(4)}(0) = \sin x \Big|_{x=0} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin(x) &= 0 + \frac{1}{1} \cdot x + 0 - \frac{1}{3!} x^3 + 0 \\ &\quad + \frac{1}{5!} x^5 + 0 - \frac{1}{7!} x^7 + 0 + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} \end{aligned}$$

- Caso $f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0$ -

$$f^{(0)}(0) = \cos x \Big|_{x=0} = 1, \quad f^{(1)}(0) = -\sin x \Big|_{x=0} = 0$$

$$f^{(2)}(0) = -\cos x \Big|_{x=0} = -1, \quad f^{(3)}(0) = \sin x \Big|_{x=0} = 0, \quad f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 + 0 - \frac{1}{2}x^2 + 0 + \frac{1}{4!}x^4 + 0 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} \end{aligned}$$

Caso di $f(x) = e^x$ con $x_0 = 0$ -

Si come $f^{(j)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(j)}(0) = 1$ -

$$\Rightarrow e^x = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!}$$

Osserviamo che formalmente

si ha $e^{ix} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(ix)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i^j x^j}{j!}$

è una definizione

Dimostriamo che $i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 0, 4, 8, \dots \\ i & \text{se } j = 1, 5, 9, \dots \\ -1 & \text{se } j = 2, 6, 10, \dots \\ -i & \text{se } j = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$

$$e^{ix} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{4j}}{(4j)!} + i \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{4j+1}}{(4j+1)!} - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{4j+2}}{(4j+2)!} - i \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{4j+3}}{(4j+3)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+2}}{(2j+2)!} + i \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} = \cos x + i \sin x$$

Abbiamo giustificato la
formula di Eulero: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Def.: ^{si dice} forma trigonometrica di
un numero complesso z , la seguente
espressione $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$
dove $\rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$, di solito $\vartheta \in [\pi, \pi]$
oppure $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

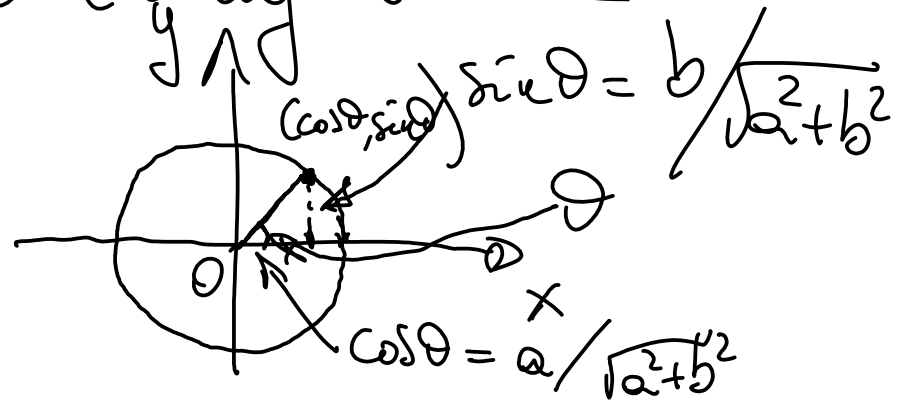
Passaggio dalla forma algebrica
a quella trigonometrica:

$$z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$= \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

dove $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ e ϑ è l'angolo t.c.

$$\begin{cases} \cos \vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$



$z = \rho e^{i\theta}$ è la forma esponenziale del
numero complesso z ,
dove abbiamo posto $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Osserviamo che, dati $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e
 $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ due numeri complessi in forma
esponenziale, allora abbiamo che
 $z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, $z_1 / z_2 = \rho_1 / \rho_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

Formule di De Moivre (si dice "de muar").

il prodotto di 2 numeri complessi in forma
trigonometrica o esponenziale è dato da:

il prodotto dei moduli moltiplicato per
l'esponentiale di i per la somma degli angoli;

il quoziente di 2 numeri $\in \mathbb{C}$ è dato
da la divisione dei 2 moduli per
l'esponentiale di i per la differenza degli angoli.

Come conseguenza

$$z^n = (p e^{i\theta})^n = p^n e^{in\theta}$$

Teorema: Sia $w = p e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $n \in \mathbb{N}$ positivo, allora $\exists$ n numeri complessi $z_j \in \mathbb{C}$ t.c. $(z_j)^n = w \quad \forall j = 0, \dots, n-1$.

Essi sono tali che

$$z_j = (p)^{1/n} \cdot e^{i(\frac{\theta + j2\pi}{n})} \quad \forall j = 0, \dots, n-1$$

Infatti, $(z_j)^n = \left(\rho^{1/n}\right)^n \cdot e^{\left(i \frac{\theta + 2j\pi}{n}\right) \cdot n}$

$$= \rho^{n/n} \cdot e^{i \frac{\theta}{n} \cdot n + \frac{2j\pi}{n} \cdot n} =$$

$$= \rho \cdot e^{i\theta + 2j\pi} = \rho \cdot e^{i\theta} = \omega_j$$

Teorema: Sia $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ un pol. di grado n , con $z, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, allora l'eq. $P(z) = 0$ ammette ~~proprio~~ n soluzioni $z_1, \dots, z_n$

Esercizio 8.4 (pag. 27)

Si risolve $z^3 = |z|$ in $\mathbb{C}$.

È conveniente esprimere $z = \rho e^{i\theta}$

$$\Rightarrow \rho^3 e^{i3\theta} = \rho = \rho \cdot 1 = \rho \cdot e^{i0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = \rho \Rightarrow \rho^3 - \rho = 0 \Rightarrow \rho \cdot (\rho^2 - 1) = 0 \\ 3\theta = 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$\left\{ \rho = 0, \rho = 1, \rho = -1 \right\} \leftarrow \begin{array}{l} \text{da scartare perché} \\ \rho \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \end{array}$$

$$\left\{ 3\vartheta = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \vartheta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right. \\ \left. \begin{array}{l} +2k\pi \\ +2k\pi \\ +2k\pi \end{array} \right.$$

le soluzioni distinte si hanno per

$$z = \rho e^{i\vartheta} \text{ con } \rho = 0 \text{ e } \vartheta \text{ qualsiasi} \Rightarrow z = 0$$

$$\rho = 1, \vartheta = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow z = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \\ = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rho = 1, \vartheta = 0 \Rightarrow z = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$\rho = 1, \vartheta = 2\pi/3 \Rightarrow z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$