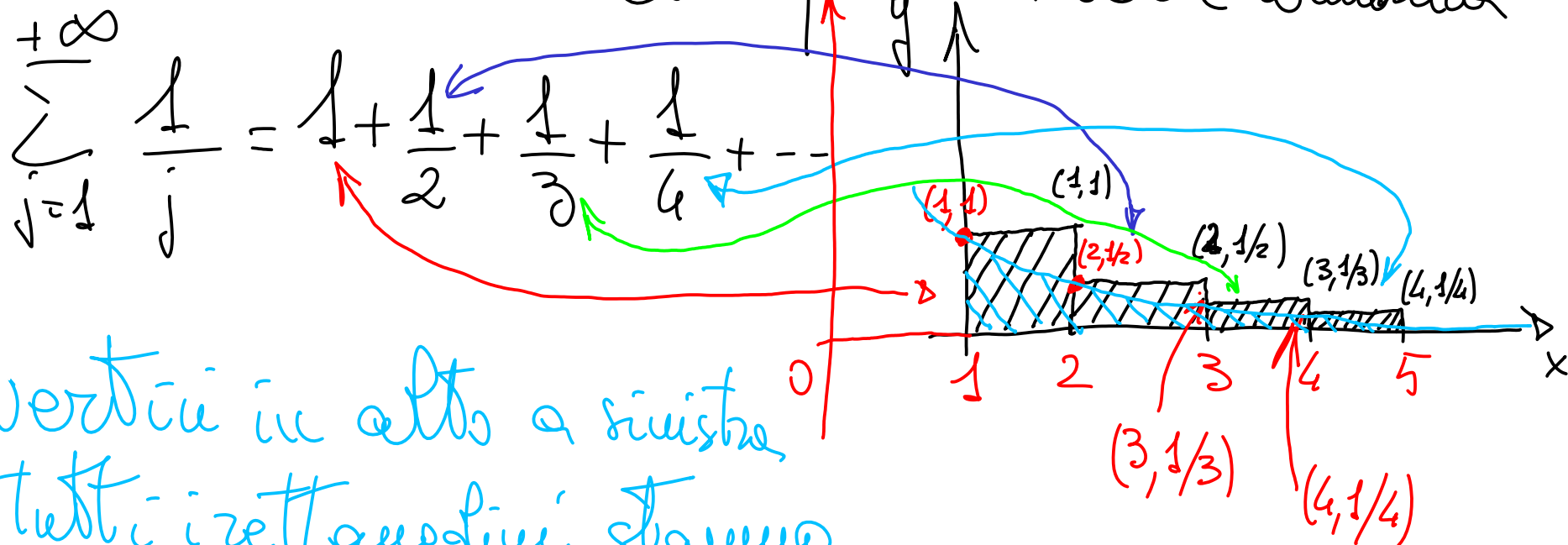


Valere la seguente relazione

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^d} \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \forall d \leq 1 \\ \text{converge a un limite } \ell \in \mathbb{R} & \forall d > 1. \end{cases}$$

Consideriamo ad esempio la serie armonica



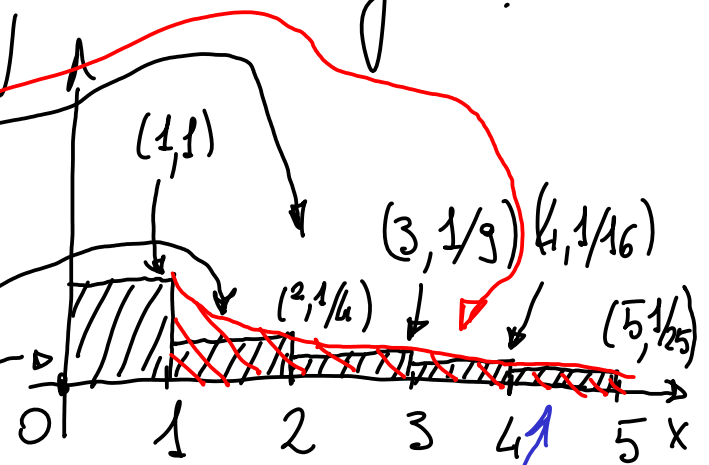
I vertici in alto a sinistra
di tutti i rettangolini stanno
sul ramo d'iperbole $y = 1/x \quad \forall x \in \mathbb{N}$

Dalla figura si deduce che

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} > \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty ! \Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} \text{ diverge!}$$

Verifichiamo ora che $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$ converge.

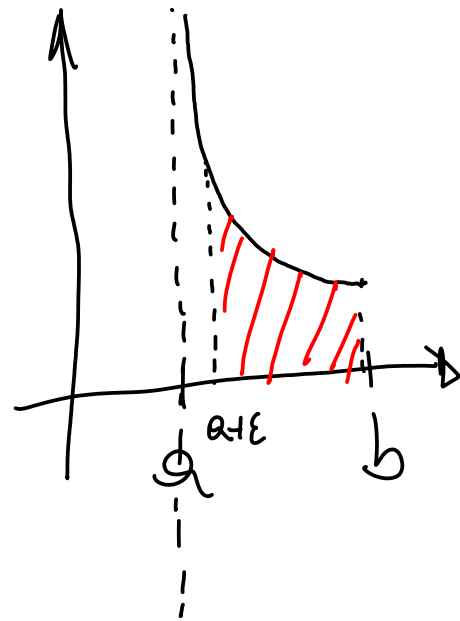
$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$



$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \\ \leq 1 + \left(-1 \cdot \frac{1}{x} \right) \Big|_1^{+\infty} \leq 1 + 1 \leq 2$$

poiché $f(x) = 1/x^2$ passa per tutti i vertici in alto a destra dei rettangoli del grafico.

Def.: Sia $f \in \mathcal{L}((a, b])$
 una funz. illimitata, definiamo

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b dx f(x)$$


Valgono i teoremi del confronto e del
 confronto asintotico nella versione per gli
 integrali di funzioni illimitate su intervalli limitati.

Es. Teorema [del confronto asintotico per] dif. illim.
 su intervalli limitati]: Siano $f, g \in \mathcal{L}((a, b])$
 t.c. $f(x), g(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b]$ e t.c. $f(x) \sim g(x)$

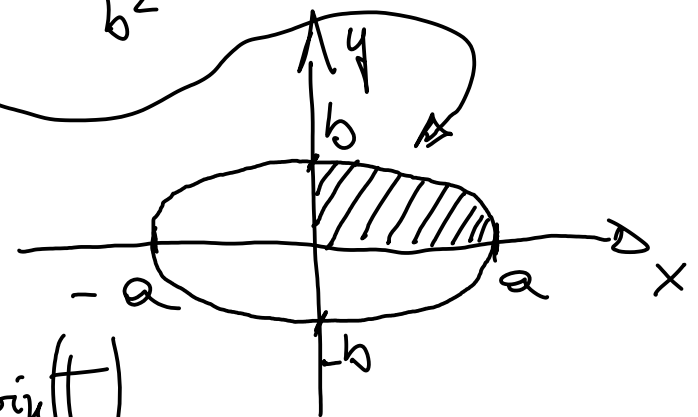
per $x \rightarrow a^+$, allora
 $\int_a^b dx f(x)$ converge se e solo se $\int_a^b dx g(x)$ converge

Si osservi che $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{diverge per } \alpha \geq 1 \\ \text{converge per } \alpha < 1 \end{cases}$

Esempio 10.12: Calcoliamo l'area
racchiusa dall'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$A = 4 \int_0^a dx b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$= 4b \int_0^a dx \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad x = a \cdot \sin(t)$$



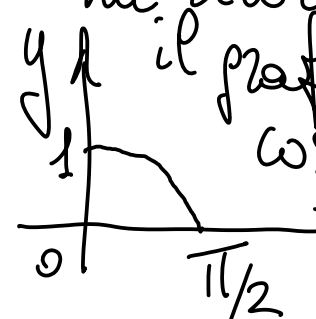
$$\Rightarrow t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right), \quad dx = a \cos(t) dt,$$

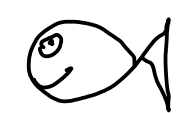
$$A = 4ba \int_0^{\pi/2} dt \cos(t) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(t)} =$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} dt \cos(t) \cdot \sqrt{\cos^2(t)}$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} dt \cos^2(t)$$

Dopo una
 ➔ manipolazio-
 ni di 
 mi ricordo che
 il grafico del
 coseno è
 positivo
 in $[0, \pi/2)$



Dopo un altro po' di  mi ricordo che

$$\cos(2t) = \cos(t+t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - 1 + \cos^2(t)$$

$$\Rightarrow 2\cos^2(t) = 1 + \cos(2t) \Rightarrow \cos^2(t) = (1 + \cos(2t))/2.$$

$$\begin{aligned}
 A &= 4ab \int_0^{\pi/2} dt \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} \right) = 2ab \int_0^{\pi/2} dt + 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2} \cos(2t) \\
 &= 2ab \left[t \right]_0^{\pi/2} + \frac{4ab}{2} \int_0^{\pi} du \cos(u) \quad , \text{dove ho posto} \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot 2ab + ab \sin(u) \Big|_0^{\pi} = \pi ab \quad \begin{matrix} u=2t \Rightarrow t=u/2 \\ dt = du/2 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

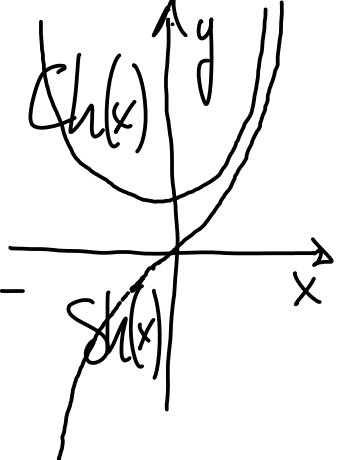
$\Rightarrow$ l'area dell'ellisse è $A = \pi ab$.

Es. 4 del terzo d'esame Luglio 2016

$$\int dx \left[\text{Ch}^3(x) + \text{Sh}(x) \cdot \text{Ch}(x) \right] \quad \text{dove } \text{Ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

STOP dell'esercizio
breve presentazione di $\text{Ch}(x)$ e $\text{Sh}(x)$

$$\text{e } \text{Sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{Ch}^2(x) - \operatorname{Sh}^2(x) = 1, \quad D \operatorname{Ch}(x) = \operatorname{Sh}(x) \\ \text{e } D(\operatorname{Sh}(x)) = \operatorname{Ch}(x)$$


Riprendiamo l'esercizio

$$\int dx \operatorname{Ch}^3(x) + \int dx \operatorname{Sh}(x) \operatorname{Ch}(x)$$

Consideriamo $\int dx \operatorname{Sh}(x) \operatorname{Ch}(x) =$, poniamo $t = \operatorname{Ch}(x)$

$$\Rightarrow dt = \operatorname{Sh}(x) dx, \quad \int dt t = \frac{t^2}{2} = \frac{\operatorname{Ch}^2(x)}{2}$$

Adesso studiamo $\int dx \operatorname{Ch}^3(x) = \int dx \operatorname{Ch}^2(x) \cdot \operatorname{Ch}(x) =$

$$= \int dx \operatorname{Ch}(x) \cdot (1 + \operatorname{Sh}^2(x)) = \int dx \operatorname{Ch}(x) + \int dx \operatorname{Ch}(x) \cdot \operatorname{Sh}^2(x)$$

$$= \operatorname{Sh}(x) + \int dt \, t^2, \text{ dove ho posto } t = \operatorname{Sh}(x)$$

$$\Rightarrow dt = \operatorname{Ch}(x) dx,$$

$$= \operatorname{Sh}(x) + \frac{\operatorname{Sh}^3(x)}{3}.$$

Metto insieme i risultati dei 2 $\int$ separati

e ottengo: $\int dx \operatorname{Ch}^3(x) + \operatorname{Sh}(x) \operatorname{Ch}(x) = \operatorname{Sh}(x) + \frac{\operatorname{Sh}^3(x)}{3} + \frac{\operatorname{Ch}^2(x)}{2}$

Comi all'Es. (3a) del tema d'esame 27/1/2015

$$F(b) = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}(e^{-\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}})} =, \text{ poniamo } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{\sqrt{5}} \frac{dt}{e^{-t} + e^t} = 2 \int_0^{\sqrt{5}} \frac{dt}{e^t + \frac{1}{e^t}} =, \text{ poniamo } u = e^t \Rightarrow du = e^t dt, \\
&= 2 \int_1^{e^{\sqrt{5}}} \frac{du}{u^2 + 1} = 2 \arctan u \Big|_1^{e^{\sqrt{5}}} = 2 \arctan(e^{\sqrt{5}}) - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Es. (2a) del tema d'esame 27/1/2015

$$g_a(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \quad \text{dove } a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+.$$

Si determini $\bar{a}$ t.c. $g_{\bar{a}}(x)$ ha minimo assoluto uguale a 0.

$$g_a(x) = \frac{ax^2 - x + 1}{x^3}$$

Metodo analitico (in x)
 Risolvo $g'_a(x) = 0$, determino
 $\hat{x}$ p.to di minimo assoluto

Metodo algebrico

Risolvo (in a) $g_a(\hat{x}) = 0$.

 $ax^2 - x + 1$ deve essere un quadrato perfetto!

$$ax^2 - x + 1 = a \cdot (x - \hat{x})^2 \Rightarrow ax^2 - x + 1 = a\left(x^2 - \frac{x}{a} + \frac{1}{a}\right)$$

$$\text{Risolvo } x^2 - \frac{x}{a} + \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{4}{a}}}{2} \text{ Voglio che siano uguali!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} - \frac{4}{a} = 0 \Rightarrow \frac{4a - 1}{a^2} = 0 \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = 1/4.$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}} \right) = 1/8.$$

$$g_{\hat{a}}(x) = \frac{1}{4x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \quad \text{che ha punto di minimo assoluto}$$

in $x_{1/2} = \frac{1}{8} -$

$$g_{1/4}\left(\frac{1}{8}\right) = 0 -$$

Per esercizio fare lo studio del grafico di

$$f(x) = g_{1/4}(x) = \frac{1}{4x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} -$$