$\simeq$ Es. 3 del Tema d'esame di fine settembre 2020

Studiare il grafico di $F(x) = \int_0^x dt\,(t^3-4t)\,e^{-t^2/2}$

1. Dominio: $D = \mathbb{R}$

2. Simmetrie e periodicità.

Calcoliamo $F(x) = \int_0^x dt\, t^3 e^{-t^2/2} - 4\int_0^x dt\, t\, e^{-t^2/2}$,

studiamo separatamente $\int_0^x dt\, t\, e^{-t^2/2} =$, poniamo $u = t^2/2$

$\Rightarrow t = \sqrt{2u}$, $du = \frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}}dt$, $= \int_0^{x^2/2} du\, e^{-u} = -e^{-u}\Big|_0^{x^2/2} = -e^{-x^2/2}+1$.

$\int_0^x dt\, \underbrace{t^3 e^{-t^2/2}}_{g(t)=t^2 \quad f'(t)=te^{-t^2/2}} = -t^2 \cdot e^{-t^2/2}\Big|_0^x + \int_0^x 2t\, e^{-t^2/2} = -x^2 e^{-x^2/2} + 2\int_0^x dt\, t e^{-t^2/2} =$

$$= -x^2 e^{-x^2/2} + 2\left(-e^{-x^2/2}+1\right) = \left(-x^2-2\right)e^{-x^2/2} + 2$$

$$\Rightarrow F(x) = -\left(x^2+2\right)e^{-x^2/2} + 2 - 4\left(-e^{-x^2/2}+1\right)$$

$$= \left(-x^2+2\right)e^{-x^2/2} - 2 \, .$$

$F(-x) = F(x)$ è una funz. pari.

Non è periodica.

③ Limiti alla frontiera

$$\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = 0^- - 2 = -2^- \, .$$

Un altro esempio di $\int_0^{+\infty} dt\, f(t) = \ell \in \mathbb{R}$.

④ Asintoti (dal p.to ③): si capisce che esiste l'asintoto orizzontale $y=-2$ per $x \to +\infty$.

⑤ $F(x)=0$, si osserva che $F(0)=0$.

$(-x^2+2)e^{-x^2/2}=2$, non cerchiamo altre soluzioni diverse da $x=0$.

⑥ Studio della derivata

$$F'(x)=f(x)=(x^3-4x)e^{-x^2/2}.$$

Cerchiamo i p.ti stazionari risolvendo l'eq. $F'(x)=0 \Rightarrow x^3-4x=0$

$\Rightarrow x\cdot(x^2-4)=0 \Rightarrow x=0,\ x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2.$

Studio del segno di F':

$$x^3 - 4x > 0 \iff x \cdot (x-2) \cdot (x+2) > 0$$

	-2		0		$+2$		
$-$		$-$		$+$		$+$	$x > 0$
$-$		$+$		$+$		$+$	$x > -2$
$-$		$-$		$-$		$+$	$x > 2$
$F'(x)$: $-$		$+$		$-$		$+$	
$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$F(x)$

Avremo p.ti di minimo in

$$x = \pm 2, \quad F(x=\pm 2) = -\frac{2}{e^2} - 2$$

e un p.to di max. in $x = 0$, $F(x=0) = 0$.

7) Studio della derivata seconda, cioè della concavità/convessità.

$$F''(x) = f'(x) = D\left[(x^3-4x)e^{-x^2/2}\right] =$$

$$= (3x^2-4)e^{-x^2/2} + (x^3-4x)(-x)e^{-x^2/2}$$

$$= (-x^4+7x^2-4)e^{-x^2/2} = -(x^4-7x^2+4)e^{-x^2/2}$$

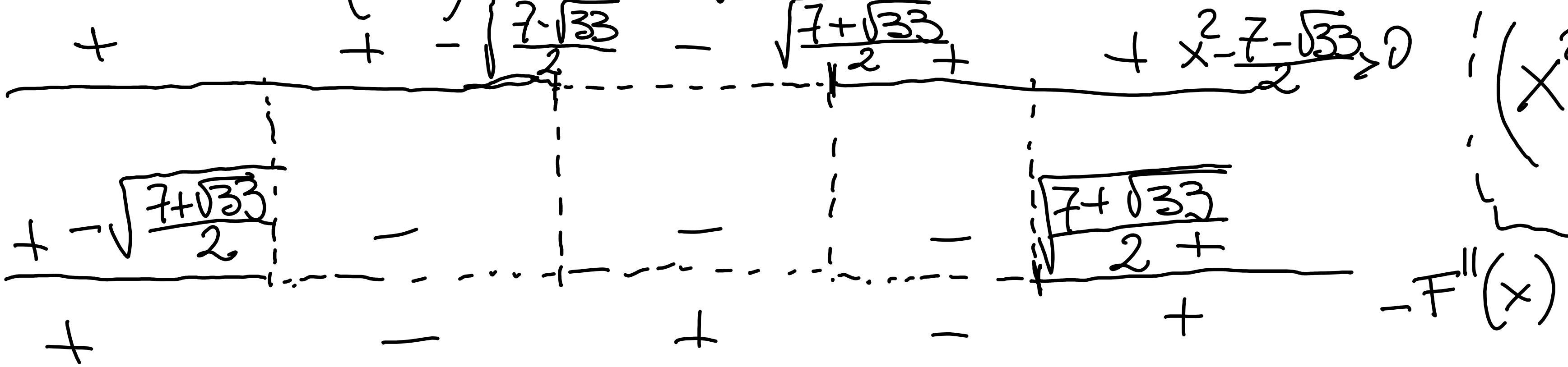
$F''(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 7x^2 + 4 = 0$. Poniamo $t = x^2$, allora $t^2 - 7t + 4 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-16}}{2}$

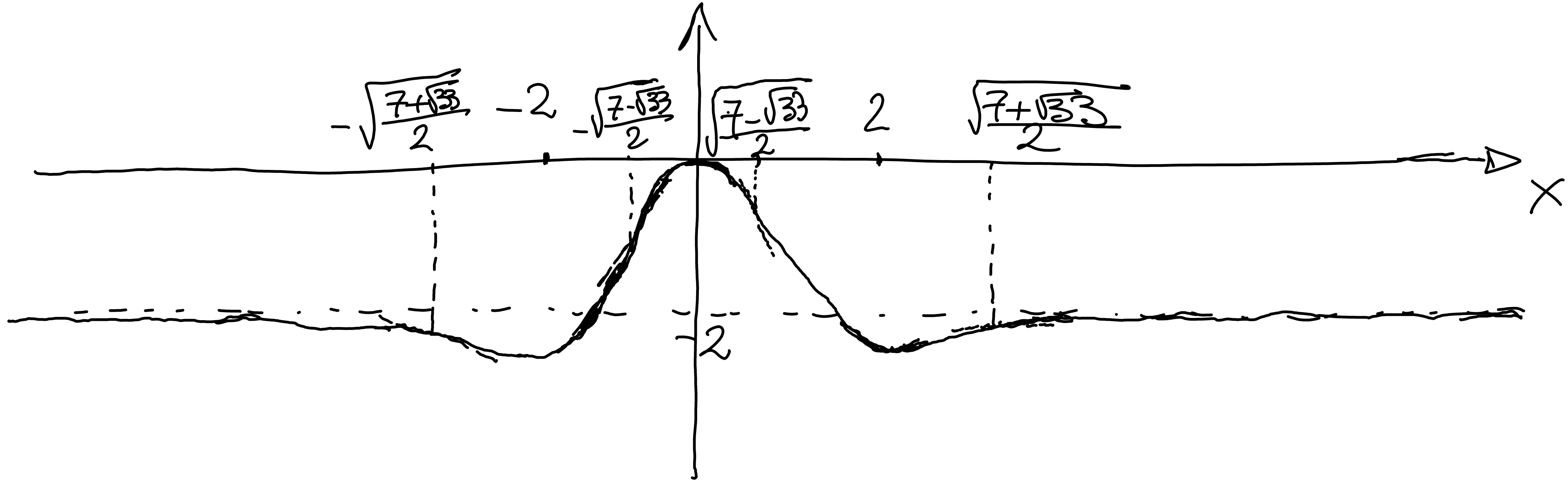
$\Rightarrow t_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{33}}{2} \simeq \begin{cases} 0.6 \\ 6.4 \end{cases}$

$\Rightarrow F''(x) = 0 \Rightarrow$ risolta da $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{33}}{2}} \simeq \pm 0.8$

e da $x_{3,4} = \pm\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{33}}{2}} \simeq \pm 2.5$

Per il segno di $F''(x)$, osserviamo che $F''(x) > 0 \iff x^4 - 7x^2 + 4 < 0 \iff \left(x^2 - \dfrac{7-\sqrt{33}}{2}\right)\left(x^2 - \dfrac{7+\sqrt{33}}{2}\right) < 0$.

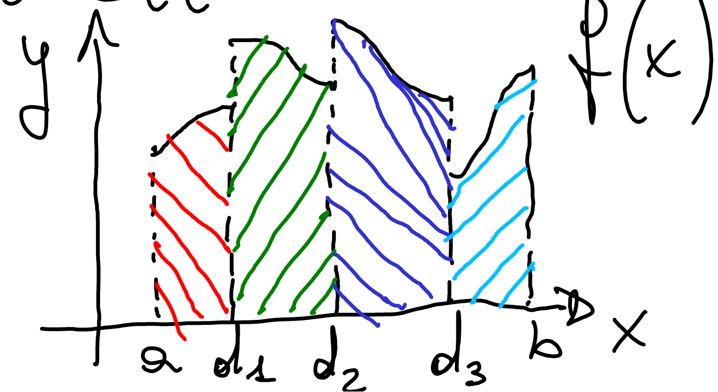




Integrali "generalizzati"

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

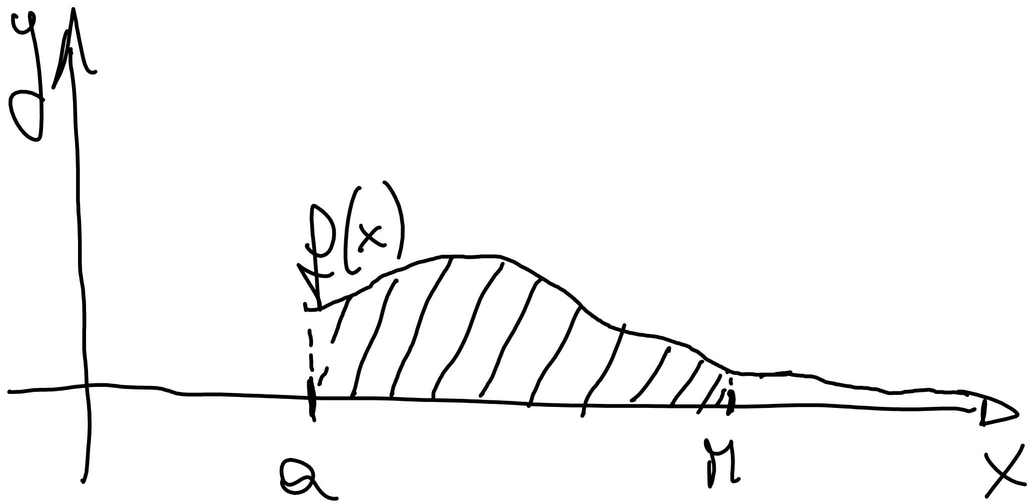
continua su $[a,b]$ tranne



nei p.ti di discontinuità con salto $d_1, \dots, d_k$

allora $$\int_a^b dx\, f(x) := \sum_{j=0}^{k} \int_{d_j}^{d_{j+1}} dx\, f(x),$$

dove si pone $d_0 = a$, $d_{k+1} = b$.



Def.: diciamo che l'integrale tra a e $+\infty$ di $f(x)$ è convergente (oppure $f(x)$ è integrabile in $[a,+\infty)$) se $$\int_a^{+\infty} dx\, f(x) := \lim_{M\to+\infty} \int_a^M dx\, f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

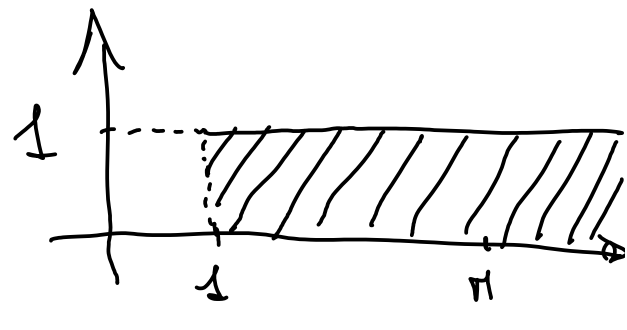
Def. diciamo che l'integrale tra a e $+\infty$ di $f(x)$ è divergente quando

$$\int_a^{+\infty} dx\, f(x) = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M dx\, f(x) = \pm\infty .$$

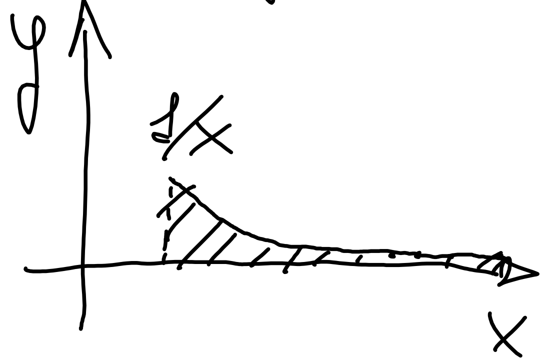
Def. diciamo che l'integrale tra a e $+\infty$ di $f(x)$ $\nexists$ se $\nexists \lim_{M\to+\infty} \int_a^M dx\, f(x)$.

Esempi: consideriamo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Se fosse $\alpha = 0$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty} dx = +\infty$.



Caso $\alpha = 1$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M\to+\infty} \log x \Big|_1^M = \lim_{M\to+\infty} \log M = +\infty$.



l'integrale di $1/x$ su $[1,+\infty)$ è divergente!

Caso $\alpha > 1$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty} dx\, x^{-\alpha} = \frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \Big|_1^{+\infty}$

$$= \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha} M^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}, \quad \text{con } 1-\alpha < 0$$

$= 0 + \dfrac{1}{\alpha-1} \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow 1/x^\alpha$ è integrabile in $[1,+\infty)$

Caso con $0<\alpha<1$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1}\Big|_1^{+\infty}$,

con $-\alpha+1>0$, $\displaystyle\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{M\to+\infty} \frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = +\infty$.

Riassumendo, abbiamo che

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{diverge per } \alpha\in(0,1] \\ \text{converge per } \alpha>1. \end{cases}$$

Criteri di integrabilità per integrali su intervalli illimitati

Teorema [del confronto]: Siano $f, g \in \mathcal{C}([a,+\infty))$ t.c. $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,+\infty)$,

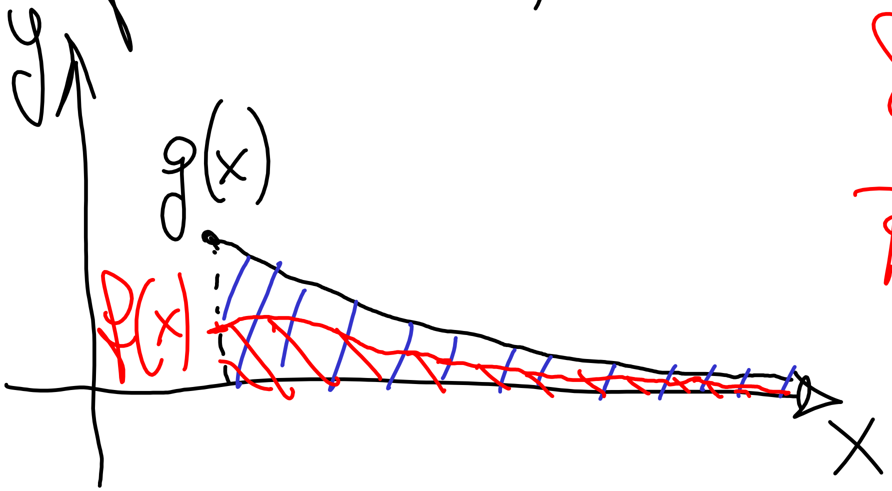
allora se $\int_a^{+\infty} dx\, g(x)$ è convergente, anche

$$\int_a^{+\infty} dx\, f(x) \text{ è convergente;}$$

invece, se $\int_a^{+\infty} dx\, f(x)$ è divergente, allora anche $\int_a^{+\infty} dx\, g(x)$ è divergente.

— o —

Graficamente, se ne capisce il senso.



Siccome l'area "rossa" è più piccola dell'area "blu" se quest'ultima è finita $\Rightarrow$ lo sarà anche l'area rossa.

Se l'area rossa è infinitamente grande, allora anche l'area blu divergerà a $+\infty$.

Verifichiamo che

$$\lim_{M\to+\infty} F(M) = \int_0^{+\infty} dx\, (x^3-4x)\, e^{-x^2/2} \text{ è convergente}$$

<u>Senza fare il calcolo della primitiva</u>.

Osserviamo che $\exists N$ t.c. $\forall x \geq N$

$$(x^3-4x)\, e^{-x^2/2} > 0 \quad \text{e}$$

$$(x^3-4x)\, e^{-x^2/2} < 1/x^2 \quad \left(\text{perché } x^2(x^3-4x)e^{-x^2/2} < 1 \text{ per } x \geq N\right)$$

Siccome $f(x) = (x^3 - 4x)e^{-x^2/2} > 0$,

$g(x) = 1/x^2 > 0$ e $f(x) < g(x)$ per $x > N$,

allora $\int_N^{+\infty} dx\, f(x) \leq \int_N^{+\infty} dx\, g(x)$ che è convergente!

$\Rightarrow \int_N^{+\infty} dx\, f(x)$ converge per il th. del confronto per integrali su intervalli illimitati.