

Esempio 5.14 : $\int dx \log x$?

$$\int dx \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\log x}_g = x \log x - \int dx \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = x \log x - x$$

Verifica: $D(x \log x - x) = D(x \log x) - 1 = \log x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} - 1 = \log x.$

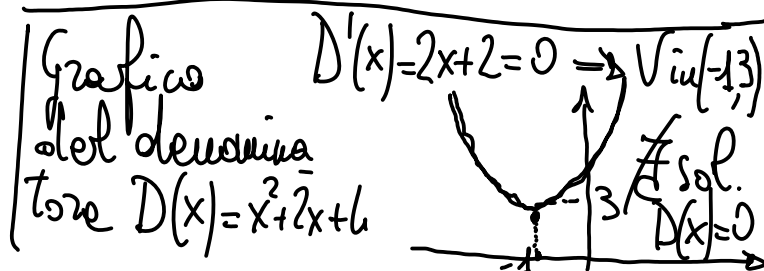
Esempio 5.7

$$\int \frac{dx}{x^2+3} = \int \frac{dx}{3\left(\frac{x^2}{3}+1\right)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{3}} = , \text{ poniamo } t = \frac{x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}t$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{3}} \Rightarrow dx = \sqrt{3} dt, = \frac{1}{3} \int \frac{\sqrt{3} dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

Esempio 10.3 : $\int dx \frac{x}{x^2+2x+4}$



In precedenza abbiamo trovato l'espressione dell'ascissa del vertice di una parabola $P(x) = ax^2 + bx + c$.
 L'ascissa del vertice è un p.to stazionario, cioè dove risolvere l'eq. $P'(x) = 0 \Rightarrow P'(x) = 2ax + b = 0$
 $\Rightarrow x = -b/2a$ è (l'unico p.to stazionario e quindi è) l'ascissa del vertice della parabola.

$$\int dx \frac{x}{x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2x + 4)}{x^2 + 2x + 4} - \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 4} dx - \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 4}$$

$$\Rightarrow \int dx \frac{x}{x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} - \int dx \frac{1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 4) - \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 4}$$

dove abbiamo posto $t = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow dt = (2x + 2)dx$

Studiamo a parte $\int \frac{dx}{x^2+2x+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1+\frac{(x+1)^2}{3}} =$

, poniamo $t = \frac{x+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{3}} dx \Rightarrow dx = \sqrt{3} dt$,
 $= \frac{1}{3} \int \frac{\sqrt{3} dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right).$

$\Rightarrow$ la soluzione, cioè $\int dx \frac{x}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2} \log(x^2+2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$

Strategia della ricerca di primitive per
 funzioni razionali, cioè $\int dx \frac{P(x)}{Q(x)}$

dove $gr(P(x)) = n < gr(Q(x)) = m$.

Se così non fosse, si calcolano $C(x)$ e $R(x)$, t.c.
 $gr(C(x)) = n - m$ e $gr(R(x)) < m$ e $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$

$$\Rightarrow \int dx \frac{P(x)}{Q(x)} = \int dx C(x) + \int dx \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ con } \rho_2(R(x)) < \rho_2(Q(x))$$

Ciò ci ricondotti al caso di partenza.

Supponiamo che $Q(x)$ sia scomponibile
nella forma $Q(x) = D_1(x) \cdot D_2(x) \cdot \dots \cdot D_s(x)$
t.c. $\rho_2(D_j(x)) = 1, 2 \quad \forall j = 1, \dots, s$

$$\Rightarrow \int dx \frac{P(x)}{Q(x)} = \int dx \frac{C_1(x)}{D_1(x)} + \int dx \frac{C_2(x)}{D_2(x)} + \dots + \int dx \frac{C_s(x)}{D_s(x)}$$

con $\rho_2(C_j(x)) < \rho_2(D_j(x)) \quad \forall j = 1, \dots, s$

$\Rightarrow$ Se $\rho_2(D_j(x)) = 1$ allora $\rho_2(C_j(x)) = 0$ cioè a num. c'è una costante
Se $\rho_2(D_j(x)) = 2$ allora $\rho_2(C_j(x)) = 0, 1$

Per oppure degli integrali del tipo $\int dx \frac{C_j(x)}{D_j(x)}$
applichiamo il metodo seguente:

- Se $\text{gr}(D_j(x)) = 1 \Rightarrow \int dx \frac{a}{bx+c} = \frac{a}{b} \log(bx+c)$

- Se $\text{gr}(D_j(x)) = 2 \Rightarrow \int dx \frac{C_j'(x)}{D_j(x)} = \int dx \frac{ax+d}{x^2+bx+c}$

con $x^2+bx+c=0$ che non ammette soluz. reali!

$$\int dx \frac{ax+d}{x^2+bx+c} = \frac{a}{2} \log(x^2+bx+c) + \int dx \frac{\text{costante}}{x^2+bx+c}$$

dove l'ultimo integrale $\int dx \frac{1}{x^2+bx+c} = \int dx \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4}\right)}$

Si come $c-\frac{b^2}{4} > 0$, $\frac{1}{c-\frac{b^2}{4}} \int \frac{dx}{1+\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 / \left(c-\frac{b^2}{4}\right)}$ si riconduce

$$\text{all'arcotangente} \left(\frac{x+b/2}{\sqrt{c-b^2/4}} \right).$$

Proviamo a applicare la suddetta strategia all'esercizio (3A) dell'esame di luglio 2016

$$\text{Si calcoli } F(\pi) = 2 \int_2^{\pi} \frac{dx}{(x+1) \cdot (x^3-1)} = 2 \int_2^{\pi} \frac{dx}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x^2+x+1)}$$

$$\underline{(x^3-1)} = (x-1) \cdot (ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-a=0 \\ c-b=0 \\ -c=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=a=1 \\ c=1 \\ c=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$F(\pi) = 2 \int_2^{\pi} \frac{dx}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} = \int_2^{\pi} dx \left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} \right)$$

$$= \int_2^{\pi} dx \frac{a(x-1) \cdot (x^2+x+1) + b(x+1) \cdot (x^2+x+1) + (cx+d)(x^2-1)}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x^2+x+1)}$$

$$= \int_2^{\pi} dx \frac{a(x^3-1) + b(x^3+2x^2+2x+1) + c(x^3-x) + d(x^2-1)}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x^2+x+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b+c)x^3 = 0 \cdot x^3 \\ (2b+d)x^2 = 0 \cdot x^2 \\ (2b-c)x = 0 \cdot x \\ -a+b-d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ 2b+d = 0 \\ 2b-c = 0 \\ -a+b-d = 2 \end{cases}$$

2^a eq. - 3^a eq. $\Rightarrow c+d=0 \Rightarrow d=-c$, sostituisco
 e ottengo $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b-c=0 \\ -a+b+c=2 \end{cases}$ Dalla 1^a eq. - 3^a eq. $\Rightarrow 2a=-2 \Rightarrow a=-1$.
 $\Rightarrow \begin{cases} b+c=1 \\ 2b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b=1 \\ c=2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1/3 \\ c=2/3 \end{cases}$

la sol. del sist. lineare è quindi

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1/3 \\ c = 2/3 \\ d = -2/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_2^x dx \frac{2}{(x+1) \cdot (x^3-1)} = - \int_2^x \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int_2^x \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int_2^x dx \frac{2x-2}{x^2+x+1}$$

$$= - \log(x+1) \Big|_2^x + \frac{1}{3} \log(x-1) \Big|_2^x + \frac{1}{3} \int_2^x dx \frac{2x+1-3}{x^2+x+1} =$$

$$= - \log(x+1) + \log(3) + \frac{1}{3} \log(x-1) - \cancel{\log(1)} +$$

$$+ \frac{1}{3} \log(x^2+x+1) \Big|_2^x - \int_2^x dx \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 3/4} =$$

$$= - \log(x+1) + \log(3) + \frac{1}{3} \log(x-1) + \frac{1}{3} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{3} \log(7)$$

$$- \frac{4}{3} \int_2^x \frac{dx}{1 + (x+\frac{1}{2})^2 / (3/4)} = \log \frac{(x^3-1)^{1/3}}{x-1} + \log \left(\frac{3}{(7)^{1/3}} \right) - \frac{4}{3} \sqrt{3} \arctan \frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}} \Big|_2^x$$

$$= \log \frac{(n^3 - 1)^{1/3}}{n - 1} + \log \left(\frac{3}{7^{1/3}} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \left(\frac{n + 1/2}{\sqrt{3}/2} \right) - \arctan \left(\frac{5/2}{\sqrt{3}/2} \right) \right]$$

Soluzione alternativa:

Si provi prima la decomposizione

$$f(n) = 2 \int_2^n dx \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+x+1)} = \int_2^n dx \left(\frac{ax+b}{x^2-1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} \right)$$

Successivamente si effettua l'ulteriore

decomposizione $\int dx \frac{ax+b}{x^2-1} = \int dx \frac{\text{costante}_1}{x-1} + \int dx \frac{\text{costante}_2}{x+1}$