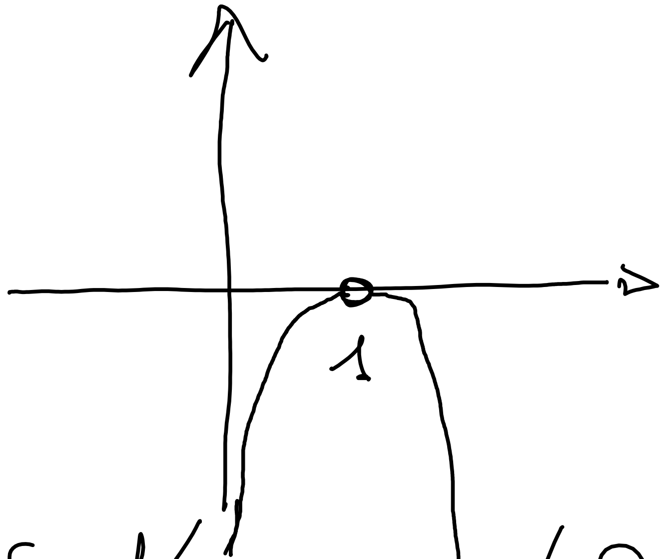
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{|h|}{\log|h|}}{h} = 0$$

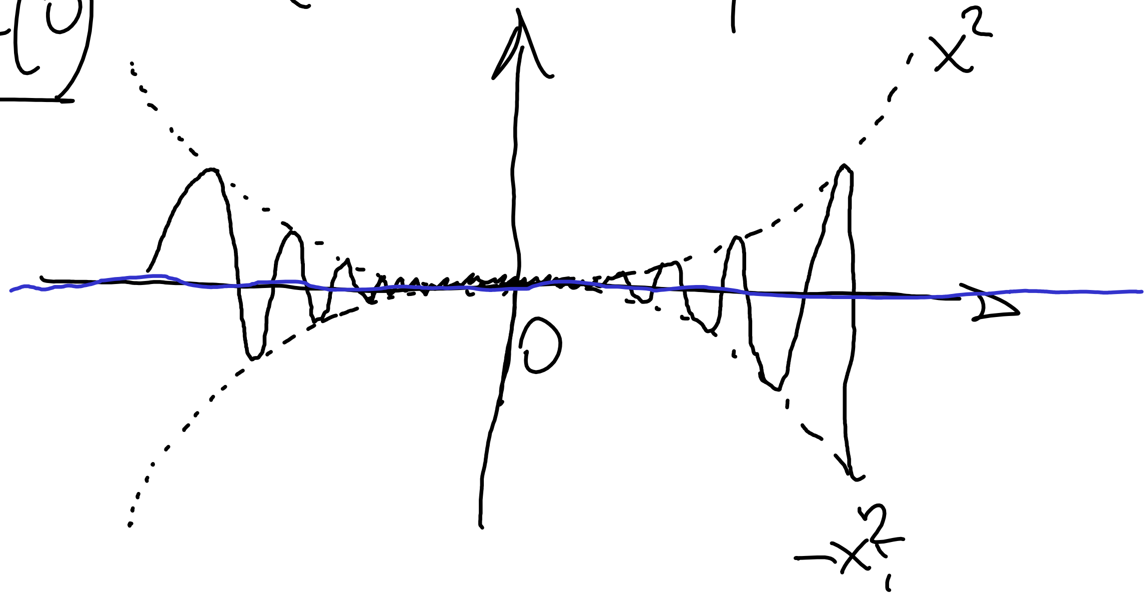


Derivata in $x=0$ di $f(x)=\begin{cases} x^2 \sin 1/x & \text{per } x\neq 0 \\ 0 & \text{per } x=0 \end{cases}$

$$?_0 = f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{\cancel{2}} \sin(1/h)}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sin(1/h) = 0$$



Osserviamo che $f'(x) = 2x\sin(\cancel{1}/x) - \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\cos(1/x)$,

cioè $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) \xrightarrow[\text{per } x\to 0]{} \nexists$.

Concludiamo che $f(x) = x^2\sin(1/x)$ è t.c. $f'(x)$ è discontinua in $x=0$, ma $\exists f'(0)$ _

Esercizio (4a) esame Giugno 2016

$$g_c(x) = \log(c - \cos x - \cos^2 x)$$

Si determini $\bar{c}$ t.c. $f(x) = g_{\bar{c}}(x)$ ha come minimo assoluto sul dominio

$\mathbb{R}$, cioè $\boxed{\min_{x\in\mathbb{R}} g_{\bar{c}}(x)=0}$.

Dalla richiesta nel riquadro segue che deve valere

$$g_{\bar{c}}(\bar{x})=0 \text{ dove } \bar{x} \text{ è t.c. } \min_{x\in\mathbb{R}} g_{\bar{c}}(x)=g_{\bar{c}}(\bar{x}),$$

quindi determino $\bar{x}$ tra le soluzioni di

$$g'_{\bar{c}}(x)=0.$$

$$g'_{\bar{c}}(x)=\frac{1}{\bar{c}-\cos x-\cos^2 x}\cdot D\left(\bar{c}-\cos x-\cos^2 x\right)=\frac{\sin x+2\cos x\sin x}{\bar{c}-\cos x-\cos^2 x}$$

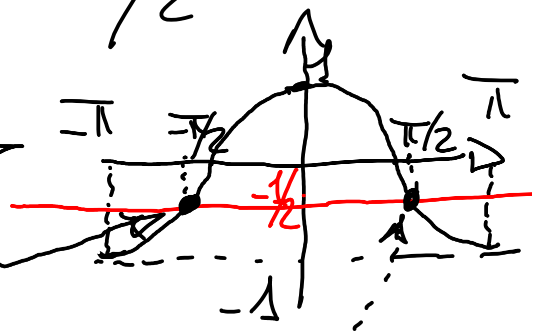
Cerchiamo di risolvere

$$\frac{\sin x + 2\sin x\cos x}{\bar{c} - \cos x - \cos^2 x} = 0 \Rightarrow \sin x\,(1+2\cos x)=0$$

Studiamo $\sin x\,(1+2\cos x)=0$

$$\sin x = 0 \qquad\qquad \cos x = -\tfrac{1}{2}$$

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$



$$\cos x = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \\ x &= -\tfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \end{aligned}\right\} k\in\mathbb{Z}$$

Osserviamo che

$$g_{\bar{c}}(0+2k\pi) = \log(\bar{c}-1-1) = \log(\bar{c}-2)$$

$$g_{\bar{c}}(\pi+2k\pi) = \log(\bar{c}+1-1) = \log \bar{c}$$

$$g_{\bar{c}}\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right) = \log\left(\bar{c}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log\left(\bar{c}+1/4\right)$$

$$g_{\bar{c}}\left(-\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right) = \log\left(\bar{c}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log\left(\bar{c}+1/4\right)$$

$$\Rightarrow g_{\bar{c}}(2k\pi) < g_{\bar{c}}(\pi+2k\pi) < g_{\bar{c}}\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right) \; -$$

Ne segue che

$$\min_{x \in \mathbb{R}} g_{\bar{c}}(x) = g_{\bar{c}}(2k\pi) = \log(\bar{c}-2)$$

$$\Longrightarrow \log(\bar{c}-2) = 0 \Longrightarrow \bar{c}-2 = 1 \Rightarrow \boxed{\bar{c}=3}$$

Esercizio 4b dell'esame di Giugno 2016

Studio del grafico di $f(x) = \log(3-\cos x-\cos^2 x)$ esclusa la trattazione della f''.

1) Dominio: $D = \mathbb{R}$.

2) $f(-x) = \log\left(3 - \cos(-x) - (\cos(-x))^2\right) = \log(3 - \cos x - \cos^2 x) = f(x)$

f è pari. Inoltre, $f(x)$ è periodica di periodo 2π.

3) Limiti alla frontiera

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \nexists$$

4 Asintoti $\nexists$ perché $f(x)$ oscilla tra 1 e $\log(13/4)$ per $x \to \pm\infty$.

5 Soluzioni di $f(x)=0$, cioè

$$\log(3-\cos x-\cos^2 x)=0$$

$$\Rightarrow 3-\cos x-\cos^2 x=1 \Rightarrow x=2k\pi$$

6 Studio di $f'(x)$ (p.ti stazionari, crescenza/decrescenza di f)

$$f'(x) = \frac{\sin x\,(1+2\cos x)}{3-\cos x-\cos^2 x} \quad \text{con } 3-\cos x-\cos^2 x \geq 1 .$$

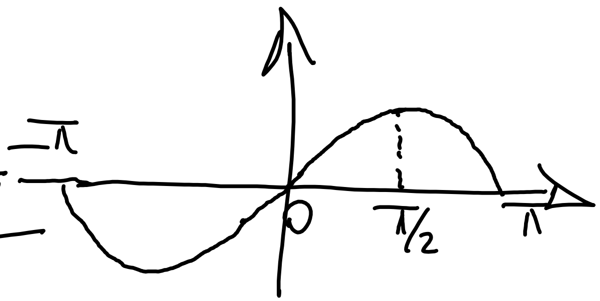
$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x\,(1-2\cos x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi,\ \pi+2k\pi,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi .$$

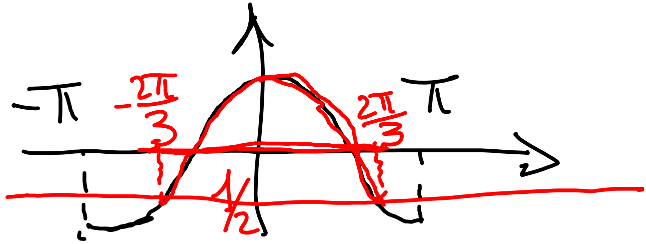
Studio del segno di $f'(x)$

$$\sin(x) \cdot (1+2\cos x) > 0$$

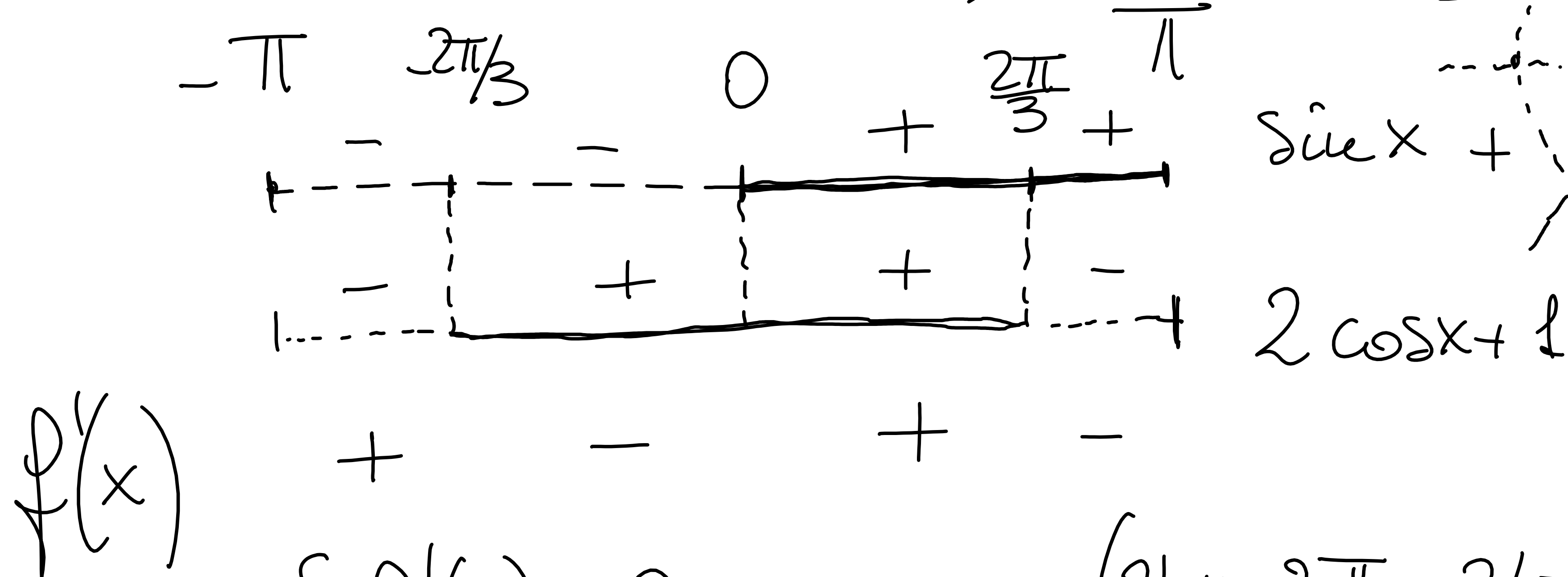
- $\sin x > 0 \quad \forall x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \ \forall k \in \mathbb{Z}$

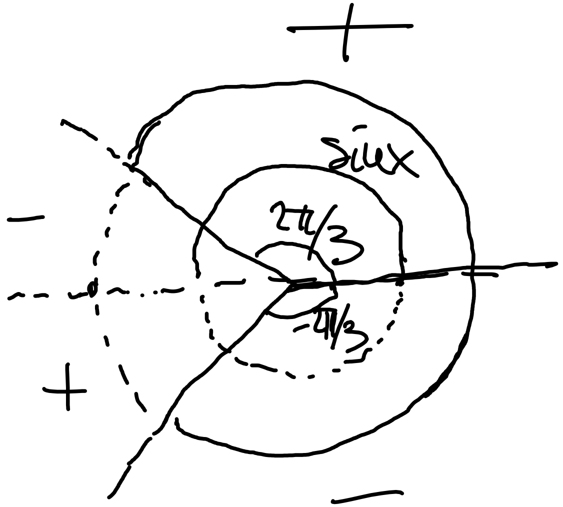


• $1+2\cos x>0 \Rightarrow \cos x>-1/2$



per $x\in\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$





$$f \text{ crescente}\begin{cases} f'(x)>0 \text{ per } x\in\left(2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right) \\ \text{per } x\in\left(-\pi+2k\pi,-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\end{cases}$$

f decrescente per $x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi\right)$

e per $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right)$

7 Studio di f'' NON RICHIESTO.