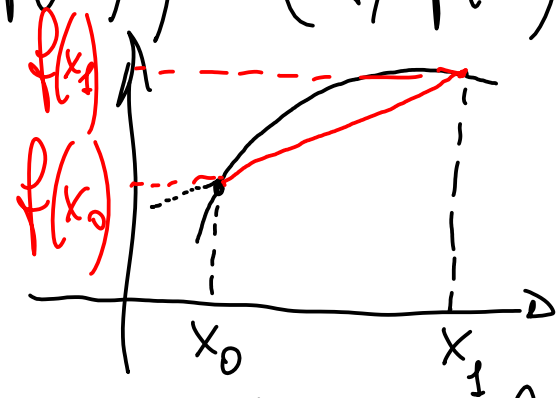


Def.: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continua in D si dice convessa
 [concava] "per corde" se $\forall$ coppia di $x_0 < x_1 \in D$
 la funzione f sta al di sotto [sopra] della
 "corda" che passa per $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$
 $\forall x \in [x_0, x_1]$.



Teorema: Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile 2 volte in
 D , allora $f''(x) \geq 0$ [$f''(x) \leq 0$] $\forall x \in D$ se e solo
 se è convessa [concava] per tangenti, se e solo se è convessa
 [concava] per corde.

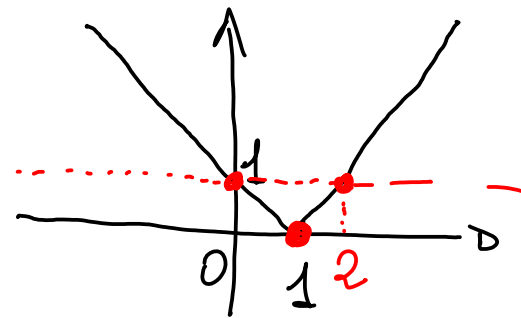
Def.: Si dice p.to di flesso un punto t.c. alla
sua sin. il grafico ha la concavità verso l'alto
[basso] e alla sua dx ha la concavità verso il basso
[l'alto] -

→ P.ti di flesso sono t.c. f'' cambia di segno
in corrisp. a quei p.ti (di flesso, appunto) -

Esempio di studio di un grafico di una
funzione - Es. 4 (2^a raccolta del prof. Fucelli)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{\log|x-1|}$$

① Dominio della funzione
 $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 0\}$



② Parità/disparità? Periodicità?

Non è né pari, né dispari. Non è periodica.

③ Limiti alla frontiera del dominio D .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|}{\log|x-1|} = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|}{\log|x-1|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{\log|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\log(x-1)} = 0^-; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{\log|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{\log(1-x)} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-1|}{\log|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{\log(x-1)} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{\log(x-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x-1|}{\log|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{\log(1-x)} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x}{\log(1-x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

④ Eventuali asintoti obliqui

Affinché ci siano asintoti obliqui devono

esistere $m_{\pm}$ e $q_{\pm} \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m_{\pm} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - m_{\pm}x = q_{\pm} \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x \log(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{\log(x-1)} = 0 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m_{\pm} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - m_{\pm}x = q_{\pm} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x \log(1-x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\log(1-x)} = 0$$

Siccome $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, $\nexists$ asintoti obliqui.

⑤ (Eventuale!) Ricerca degli zeri.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{|x-1|}{\log|x-1|} = 0 \Rightarrow |x-1| = 0$$

$\Rightarrow x=1 \notin D \Rightarrow \nexists$ soluzioni di $f(x)=0$.

⑥ Studio della derivata

(Ricerca dei p.ti stazionari, cioè sol. di $f'(x)=0$;
determinazione dei p.ti di min e di max
che troviamo in corrisp. al cambio di segno di f').

$$f'(x) = \begin{cases} \text{se } x > 1, \text{ allora } D \frac{x-1}{\log(x-1)} = \frac{\log(x-1) - 1}{(\log(x-1))^2} \\ \text{se } x < 1, \text{ allora } D \frac{1-x}{\log(1-x)} = \frac{-\log(1-x) + \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)}{(\log(1-x))^2} = \frac{-\log(1-x) + 1}{(\log(1-x))^2} \end{cases}$$

Cerchiamo di determinare le soluzioni di

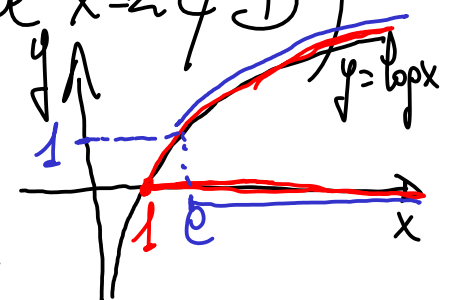
$$f'(x) = 0, \text{ per } x > 1 \Rightarrow \log(x-1) = 1 \Rightarrow x-1 = e \Rightarrow x = 1+e;$$

$$\text{per } x < 1 \Rightarrow +\log(1-x) = +1 \Rightarrow 1-x = e \Rightarrow x = 1-e.$$

Studio di $f'(x) > 0$

$$\text{Per } x > 1 \Rightarrow \frac{\log(x-1) - 1}{(\log(x-1))^2} > 0 \Rightarrow \left(\text{siccome } x=2 \notin D \right)$$

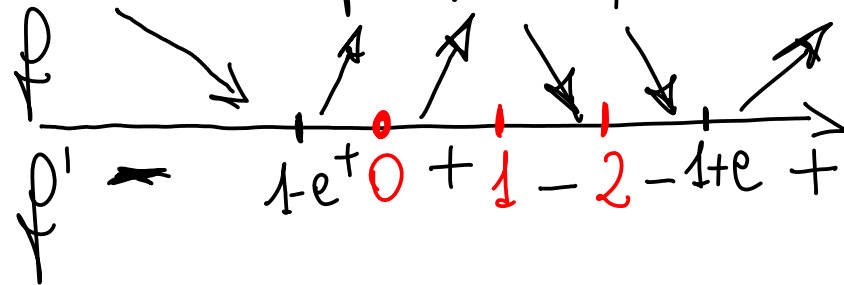
$$\Rightarrow \log(x-1) > 1 \Rightarrow x-1 > e \Rightarrow x > 1+e.$$



$$\text{Per } x < 1 \Rightarrow \frac{-\log(1-x) + 1}{(\log(1-x))^2} > 0 \Rightarrow \left(\text{siccome } \{0\} \notin D \right)$$

$$\Rightarrow -\log(1-x) > -1 \Rightarrow \log(1-x) < 1 \Rightarrow 1-x < e$$

$$\Rightarrow x > 1-e \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ per } x \in (1-e, 1) -$$



⑦ Studio della concavità/concavità
 $(f''(x) = 0 \text{ e } f''(x) \geq 0) -$

$$\text{Per } x > 1, \quad \frac{\log(x-1) - 1}{(\log(x-1))^2} = \frac{\frac{1}{x-1} \cdot (\log(x-1))^2 - 2(\log(x-1)) \frac{\log(x-1) - 1}{x-1}}{(\log(x-1))^4}$$

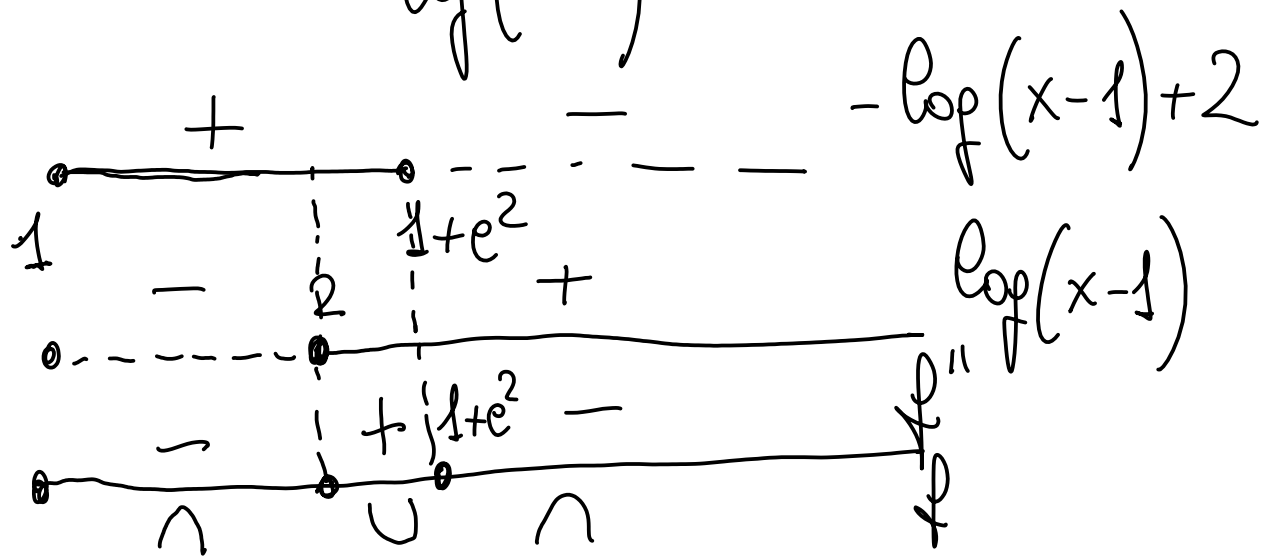
$$= \frac{\log(x-1) - 2\log(x-1) + 2}{(x-1) \cdot (\log(x-1))^3} = \frac{-\log(x-1) + 2}{(x-1) \cdot (\log(x-1))^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \log(x-1) = 2 \Rightarrow x = 1 + e^2$$

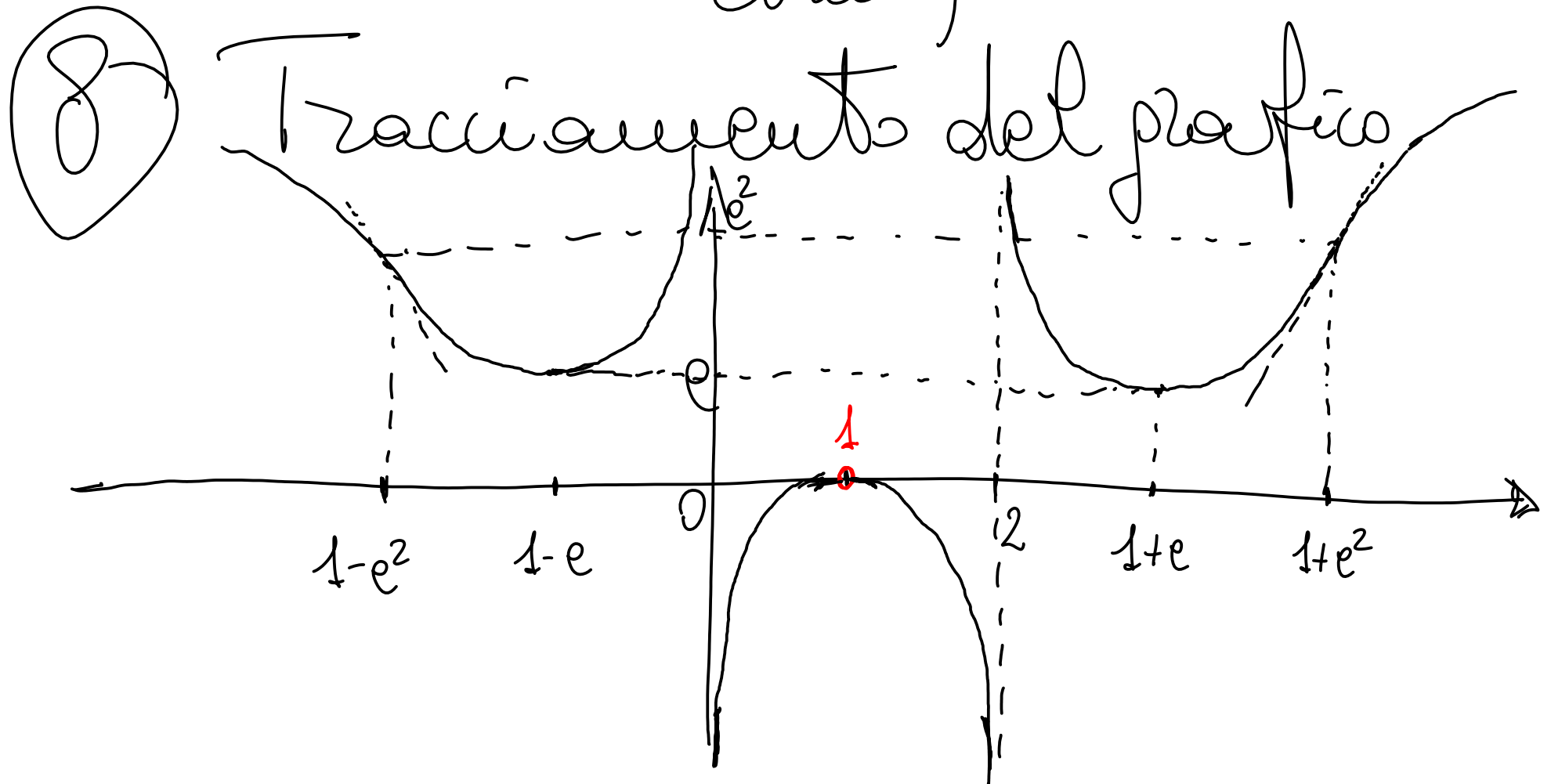
$$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Studium } -\log(x-1) + 2 > 0 \Rightarrow \log(x-1) < 2 \Rightarrow x < 1 + e^2$$

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (\text{Sampeverifikation})$$

$$\log(x-1) > 0 \Rightarrow x > 2$$



Per $x < 1$ (ve lo lascio per esercizio,
perché so che avete fatto,
tanto sappiamo che c'è una
simmetria)



Verificare che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} = 0$ (per controllare
che la tangente
tende a essere
orizz. per $x \rightarrow 1$) -

Fare lo studio semplificato di

$$g(x) = \frac{\log |x|}{|x|}$$