

Teorema (di Taylor-Maclaurin): $f \in \mathcal{C}^n((a,b))$
 (= f derivabile n volte con tutte le derivate continue)
 allora $\forall x, x_0 \in (a,b)$ vale la relazione

$$f(x) = \left[\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (x-x_0)^j \right] + o((x-x_0)^n)$$

si legge
 etc. $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$, $f^{(2)}(x_0) = f''(x_0)$
 Formula di Taylor-Maclaurin con resto di Peano

Dim. (ci limitiamo al caso $n=2$). Dobbiamo verificare che è uguale a zero il seguente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{j=0}^2 \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \cdot (x-x_0)^j}{(x-x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0)/2}{2(x-x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{2} = 0,$$

dove abbiamo applicato 2 (in generale n) volte il teorema di de l'Hospital. C.U.D.

Es. 62 (Rifacciamolo in "modo misto")

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} =, \text{ siccome } \sin x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0, = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} =,$$

applichiamo de l'Hospital, $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/6$,
 dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato un limite notevole.

Es. 62 (reloaded again in "modo misto" ma usando
 la formula di Taylor).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = , \text{ siccome } \sin x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} =$$

Sviluppiamo la formula di Taylor (con resto di Peano) di

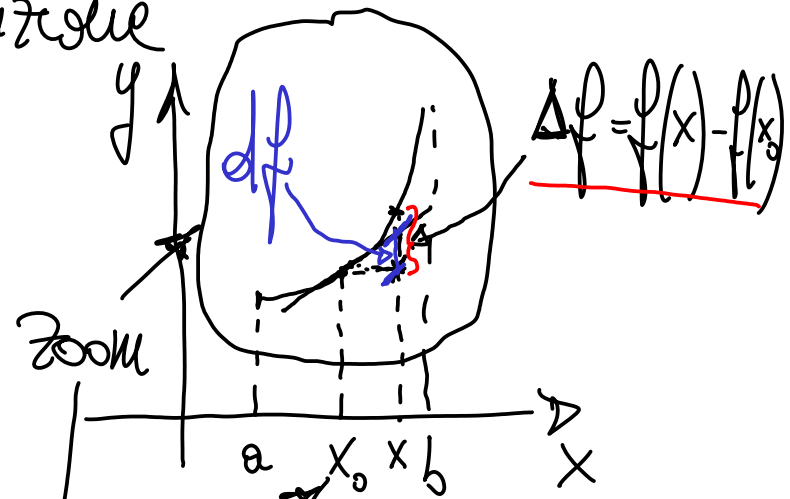
$$x - \sin x = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} D^j(x - \sin x) \Big|_{x=0} x^j + o(x^n) = \cancel{0 - \sin 0} + \cancel{(1 - \cos x) \Big|_{x=0} x} \\
+ \cancel{\frac{(\sin x) \Big|_{x=0}}{2} x^2} + \frac{(\cos x) \Big|_{x=0}}{6} x^3 + o(x^3) = \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0,$$

$$\Rightarrow = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/6 x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{6} \frac{x^3}{x^3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right] = \frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 1/6.$$

Differenziale di una funzione

Δf si dice essere l'incremento della funzione tra x e x_0 .

$$df = f'(x_0) \cdot dx = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

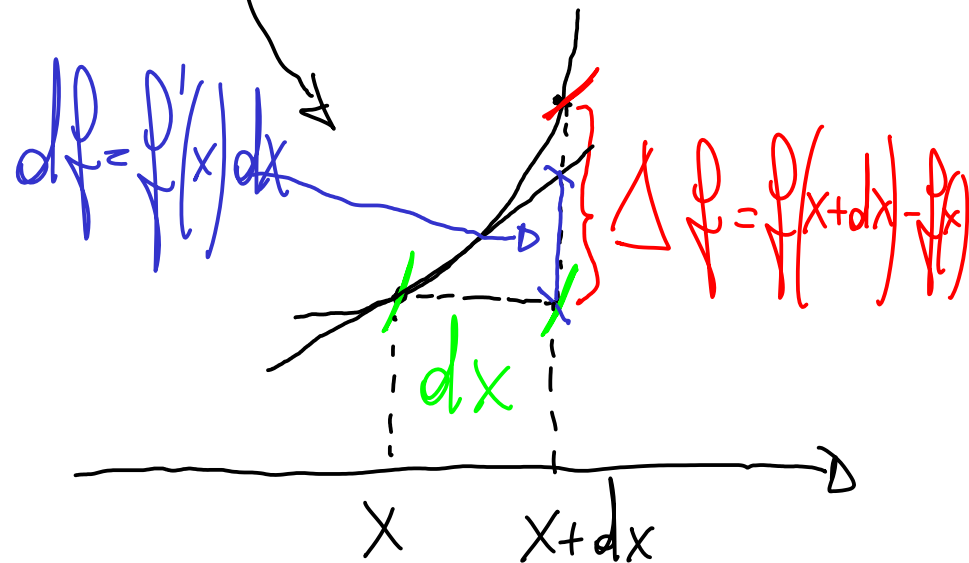


Osservazione

$$\Delta f \sim df \text{ per } dx \rightarrow 0$$

$$\text{cioè } \Delta f - df = o(dx)$$

In fatti, $\lim_{dx \rightarrow 0} (\Delta f - df) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x) - f'(x)dx}{dx} =$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{dx \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} - f'(x) \right] = \left(\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \right) - f'(x) = \\
 &= f'(x) - f'(x) = 0
 \end{aligned}$$

Teorema (formula di Taylor con resto di Laplace):

Sia f derivabile $n+1$ volte su tutto il suo dominio (a, b) , allora $\forall x, x_0 \in (a, b) \exists c \in (x_0, x)$

t.c.
$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j + f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Si chiama con resto di Lagrange, perché quando $n=0$, si ha che

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0) \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c).$$

È notevole l'uso della formula di Taylor con resto di Lagr - quando possiamo stimare la derivata $n+1$ -esima, cioè quando si ha che

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad \forall x \in (a,b)$$

Esempi: seno e coseno hanno tutte le derivate tra -1 e $1 \Rightarrow |D^{(n+1)} \sin(x)| \leq 1$.

In quel caso:

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \xrightarrow[\text{per } n \rightarrow +\infty]{} 0$$

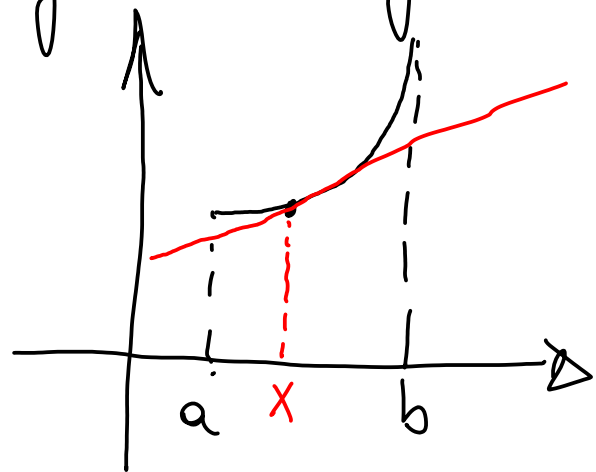
↑
quello che viene valutato dalle
macchine calcolatrici

Derivate seconde, concavità e convessità

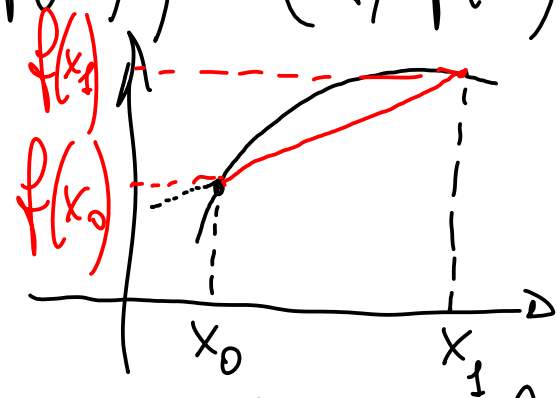
$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad \text{è la derivata seconda in } x.$$

Def.: Si dice che una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ che è derivabile 2 volte su D è convessa [concava] se $f''(x) \geq 0$ [$f''(x) \leq 0$] $\forall x \in D$.

Def.: Si dice che $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile 1 volta su tutto D è convessa [concava] "per tangenti" se la f sta sempre al di sopra [di sotto] di ogni sua tangente tracciata $\forall x \in D$.



Def.: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continua in D si dice convessa
 [concava] "per corde" se $\forall$ coppia di $x_0 < x_1 \in D$
 la funzione f sta al di sotto [sopra] della
 "corda" che passa per $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$
 $\forall x \in [x_0, x_1]$.



Teorema: Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile 2 volte in
 D , allora $f''(x) \geq 0$ [$f''(x) \leq 0$] $\forall x \in D$ se e solo
 se è convessa [concava] per tangenti, se e solo se è convessa
 [concava] per corde.